This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Canù gianfranco Cremona

A 546928

BIBLIOTECA RICCARDI
in Modena
S. VI F. 2 N. 14

1817
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
35
.S16

Saladini, Girolamo

ELEMENTA GEOMETRIAE INFINITESIMORUM

AUCTORE

D. HIERONYMO SALADINI

LUCENSI

Monacho Caeleſtino, & in eadem Congregatione Philoſophiae Lectore, nec non in Univerſitate Bononienſi publico Matheſeos Profeſſore.

LIBRI TRES.



BONONIAE MDCCLX.

Ex Typographia S. Thomae Aquinatis,

SUPERIORUM PERMISSU.

Illm̃o & Rm̃o Domino

D. SERAPHINO BRANCONE

THEBARUM ARCHIEPISCOPO.

D. HIERONYMUS SALADINI F.

DUae potiſſimum cauſſae me impulerunt, ut opuſculum hoc meum, qualecumque eſt, tibi inſcriberem, Illuſtriſſime, & Reverendiſſime Praeſul. Nam primùm quem mihi ma-

gis patronum optarem, quam eum, a quo & ſplendorem ſummum, & adjumenta quamplurima, praeſertim in litterarum ſtudiis, in Congregationem noſtram univerſam redundarunt? Te autem eum eſſe nemo unus ignorat; quippe & praeceptis optimis, dum ſtudiis praeeſſes, in eaque dignitate longe excelleres, & exquiſitiſſima cujuſcunque generis doctrina juvenes noſtros imbuiſti. Neque vero a promovendis ſtudiis, & Congregatione noſtra, quacumque re opus eſſet, juvanda deſtitiſti: quamquam a Carolo Borbonio tunc Neapolitanorum, nunc Hiſpanorum Rege invictiſſimo, primùm ad Epiſcopalem Sedem Gallipolitanam, tum

*ad Thebarum Archiepiſcopalem di-
gnitatem vocatum, te a Congrega-
tione noſtra, veluti a noſtro corpore
diſtraxerint. Huc accedit praeclariſ-
mi Fratris tui in nos ſtudium incre-
dibile, qui ſapientiſſimi illius Regis
primarius Rei ~~Eccleſiaſticae Admini-~~
ſter quum eſſet, ſic negotia noſtra tra-
ctavit, ut videretur ea quoque in
publicis totius Regni negotiis repoſuiſ-
ſe. At haec quidem ad univerſum
Caeleſtinorum Ordinem pertinent. Illa
vero mea propria ſunt, meque po-
tiſſimùm movent, quod Fratris al-
terius tui Cherubini, quem nunc Ab-
batem Generalem habemus, ſummam,
ac prope incredibilem benignitatem
& agnovi, & ſum expertus. Id*

quod

quod mihi facile omnes credent; quis enim illo aut alacrior in communi re adminiſtranda, aut prudentior, aut juſtior, aut moderatior unquam fuit? Litterarum autem ſtudia quam amanter promovet! quam liberaliter ſtudioſos excipit! quam omni favore, & gratia complectitur! Huic ergo gratum facturum me eſſe exiſtimavi, ſi libellum hunc meum, quaſi ſtudiorum meorum primitias, tibi, Illuſtriſſime & Reverendiſſime Praeſul, obſequentiſſime offerrem. Hunc igitur benigne accipe, meque in addictiſſimis, humillimiſque tuis famulis habe.

LECTORI.

QUam utilia ſint, quinimo & neceſſaria elementa Geometriae infiniteſimorum, facile deprehendere potuit, quicumque animum ad ſublimiores cognitiones rerum mathematicarum appulerit. Quum enim fieri nullo pacto poſſit, ut in illis, niſi quantitatum infiniteſimarum ope, admodum proficiamus, hinc incredibile eſt, quibus difficultatibus, & erroribus obnoxii ſint mathematicarum diſciplinarum ſtudioſi, qui affectiones, proprietates, relationeſque magnitudinum infiniteſimarum non probe teneant. Quae proprietates eo minus perſpectae eſſe ſolent, quo altius evehuntur, quam proprietates magnitudinum finitarum, quae paſſim in vulgari

Geometria explicantur; potiſſimum vero, cum neminem adhuc viderim, qui in illis expendendis operam poſuerit. Praeclariſſimi viri Iſaacus Newton, & Gotofridus Leibnitz, omnium primi methodum detexerunt ſupputandi quantitates infiniteſimas, ad quam perficiendam poſtea ſublimiora Europae ingenia inſudarunt, & adhuc inſudant; ſed quamvis talis methodus Geometriae infiniteſimorum tota innixa ſit, nondum tamen, quod ego ſciam, liber prodiit, qui pro ejus Geometriae elementis haberi poſſit; quamquam viam, ut ita dicam, ſtraviſſe videntur & ſummus Newton, ubi agit de methodo rationum primarum, & ultimarum; & lectiſſima Foemina Agneſia initio Tomi ſecundi Inſtitutionum analyticarum. Hinc procul dubio factum eſt, ut methodi analyticae, quibus plerique utuntur, ſupputandi quantitates infiniteſimas,

nec ita univerſales interdum ſint, quemadmodum hactenus creditum eſt, nec ita fortaſſe verae. Quod quum animadvertiſſem, mecumque ipſe reputarem, num tale opus aggredi ipſe poſſem, rem totam communicavi cum Vincentio Riccati Societatis Jeſu, viro celeberrimo, & de mathematicis diſciplinis optime merito, cui tribuenda eſt mea, qualiſcunque ſit, earumdem cognitio; is autem in propoſito me confirmavit, omnemque timorem ſuſtulit, quem mihi homini, praeſertim adoleſcenti, & rei magnitudo afferre debebat, & virium infirmitas. Huc acceſſit etiam auctoritas praeclariſſimi viri Franciſci Mariae Zanotti a ſecretis Academiae Bononienſis, qui hoc conſilium, ſupra quam cuique credibile eſt, mihi commendavit. Illud etiam in mentem veniebat, ſubtiliſſimum Rogerium Boſcowich, & ipſum Societatis

Jeſu, quem Romae cognoveram, in magnitudinum infiniteſimarum Syntheſi mirum in modum delectari, neque verum Mathematicum exiſtimare, qui hanc non calleret. Hiſce de cauſis permotus non dubitavi Theoremata ſtatim omni ſtudio perquirere, quae rite demonſtrata, atque ex ordine propoſita, tractationem illam, quam deſideraveram, quaeque pro elementis Geometriae infiniteſimorum haberi poſſet, conſtituerent. Hanc ego emitto in libros tres diviſam. In primo doctrinam expedio triangulorum habentium determinationem ad quantitatem infiniteſimam pertinentem, examino differentiam productorum, determinatis differentiis radicum, atque in Appendice hujuſce libri conſidero rectas a vero paralleliſmo declinantes quantitate infiniteſima. In ſecundo verò perpendo differentias arcuum, & angulorum infini-

finiteſimorum, eorumque linearum trigonometrarum, atque ſuperficierum ab iſtis lineis, & ſolidorum ab iſtis ſuperficiebus genitorum in rotatione ſemicirculorum circa diametros. In tertio tandem conſidero curvas generatim, quas mihi, ad majorem claritatem, ut polygona infiniteſimorum laterum repraeſento; imprimis examino angulos factos a tangentibus cum curva; deinde methodum trado determinandi ex quantitatibus infiniteſimis ordinis inferioris infiniteſimas ordinis ſuperioris, tam in curvis ad diametros relatis; quam in curvis relatis ad focum; trado ſimiliter methodum determinandi rectas maximas, & minimas curvarum, dimetiendi earum curvaturas per circulos oſculatorios; ubi oſtendo non omnes curvas habere tales circulos, atque inutile eſſe conferre ſe ad vertices parabolarum

primariarum, & ſuperiorum pro menſurandis curvaturis, ubi evadunt minores omni circulo finito; ac tandem aſſigno methodum tutam, atque certam determinandi, & diſtinguendi in curvis puncta interſectionis, puncta flexus contrarii, atque regreſſus. Caeterum tibi, Lector benevole, hujus operis judicium relinquo, qui ſi minus rem ipſam, voluntatem certe, & deſiderium meum commendabis. Alii fortaſſe exemplo meo incitati, quod perficere ego non potui, perficient ipſi, & abſolvent. Vale.

Ὁ ΘΕΟΣ Γεωμετρεῖ.

TU autem Domine, quantus es Geometra? Quum enim haec ſcientia nullos terminos habeat, quum in ſempiternum novorum theorematum inventioni locus relinquatur, etiam penes humanum ingenium, Tu uno haec omnia intuitu perſpecta habes, abſque catena conſequentiarum, abſque taedio demonſtrationum. Ad caetera pene nihil facere poteſt intellectus noſter; & tanquam brutorum phantaſia, videtur nonniſi incerta quaedam ſomniare; unde in iis quot ſunt homines, tot exiſtunt fere ſententiae: in his conſpiratur ab omnibus, in his humanum ingenium ſe poſſe aliquid, imo ingens aliquid, & mirificum viſum eſt,

ut nihil magis mirum; quod enim in caeteris pene ineptum, in hoc efficax, ſedulum, proſperum, &c. Te igitur vel ex hac re amare gaudeo, Te ſuſpicere, atque illum diem deſiderare ſuſpiriis fortibus, in quo purgata mente, & claro oculo non haec ſolum omnia abſque hac ſucceſſiva, & laborioſa imaginandi cura, verum multo plura, & majora, ex tua Bonitate, & immenſiſſima, ſanctiſſimaque Benignitate conſpicere, & ſcire concedetur, &c.

Cl. Barrowii verba Apollonio ſuo praefixa.

ELE-

ELEMENTA
GEOMETRIAE
INFINITESIMORUM

LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

DEF. I.

GEOMETRIA infiniteſimorum eſt ſcientia, qua conſiderantur relationes magnitudinum infiniteſimarum.

DEF. II.

Quis quis ſibi quantitates aliquas conſiderandas, atque inter ſe comparandas proponit, ſi id, quod agit, paulo diligentius ſecum reputet, facile intelliget, in unoquoque quantitatum genere ſe unam quaſi primam aſſumere, ad quam aliae omnes ejuſdem generis referantur, cujuſque reſpectu aliarum magnitudines determinentur. Prima illa quantitas, qualiſcumque ea ſit, dicitur *unitas*; & eſt quaſi communis menſura unitas, quae aſſumitur, omneſque aliae quantitates, quae ad unitatem proportionem habent fini-

tam (ideſt eam, quae finito numero exprimi poſſit) dicuntur *aſſignabiles*, a nonnullis etiam *finitae*.

DEF. III.

Si inducatur quantitas major quacunque aſſignabili, quaeque idcirco ad unitatem, quae aſſumpta eſt, proportionem habeat adeo magnam, ut nullo finito numero poſſit exprimi, ea dicitur *quantitas infinita*.

DEF. IV.

Si inducatur quantitas minor quacunque aſſignabili, quaeque idcirco ad unitatem, quae aſſumpta eſt, proportionem habeat adeo parvam, ut nullo finito numero poſſit exprimi, ea dicitur *quantitas infiniteſima*. Erunt autem infiniteſimae aliae omnes quaecunque ad hanc habent proportionem aſſignabilem, ideſt finito numero exprimendam, veluti ſi ſint ejus duplae, triplae &c. quod facile patet. Hinc praeter quantitates aſſignabiles, exi-

ſtit

ſtit jam alter quantitatum ordo, nempe infiniteſimarum. Ac plane conſtat quantitatem quamvis infiniteſimam, quantumcunque ea repetatur, modo finities tantum repetatur, nunquam evadere poſſe aſſignabilem; ut ergo evadat aſſignabilis, neceſſe eſſe, ut repetatur infinities; quo ſane apparet infinita diſtantia, quae intercedere dicitur inter quantitates aſſignabiles, & infiniteſimas.

DEF. V.

Porro cum ordinem quempiam induxeris quantitatum infiniteſimarum, quae infinite diſtent ab aſſignabilibus, nihil impedit, quominus alias etiam quantitates fingas, quae ab illis infiniteſimis, quas induxiſti, eadem ratione diſtent infinite, quaeque alium infiniteſimarum ordinem conſtituant. Eo modo ad alios alioſque infiniteſimarum quantitatum ordines deinceps procedes, quoad libuerit. Is ordo infiniteſimorum, quem tibi poſt quantitates aſſignabiles primum proponis, dicitur *primus infiniteſimorum ordo*. Quem

tibi poſt hunc proponis, dicitur *ſecundus*. Alii deinceps *tertius*, *quartus &c.* Secundus ordo dicitur ſuperior primo, tertius ſecundo &c.

DEF. VI.

Numerus naturalis, ex quo ordo infiniteſimorum denominationem ſuam ſortitur, appellatur *numerus ordinis*; hinc ordines ſummare, unum ab alio ſubtrahere, eſt ſummare, & ſubtrahere numeros ordinum.

DEF. VII.

Ordo *duplo*, vel *triplo major* relate ad alium ordinem dicitur ille, cujus numerus eſt duplus, vel triplus relate ad numerum iſtius ordinis.

AXIO-

AXIOMATA.

AXIOMA I.

QUoniam proportio quantitatis infiniteſimae ad aſſignabilem adeo minima eſt, ut nullo aſſignabili, aut determinato numero, quamtumvis minimo, poſſit exprimi, ideſt menſuras omnes fugiat quaſcunque, ut ut minimas, excogitare, aut determinare poſſumus; ea re fit, ut, ſi quantitates aſſignabiles inter ſe comparare, certiſque menſuris dimetiri velimus, nulla ſit nobis ratio habenda quantitatum infiniteſimarum; quae idcirco in illa conſideratione perinde habentur, ac ſi nihil plane eſſent. Quare ſi quantitati aſſignabili infiniteſima quaevis addatur, aut dematur, illius magnitudo nihil mutari cenſebitur. Eandem ob cauſam ſi quantitati infiniteſimae cujuſvis ordinis addatur, aut dematur infiniteſima ordinis ſuperioris, v. gr. ſi infiniteſimae tertii ordinis addatur, aut dematur infiniteſima ordinis quarti, magnitudo illius eadem, quae antea, manere exiſtimabitur.

AXIOMA II.

Nulla magnitudo in ſe infiniteſima cenſeri debet, ſed tantum relative ad alias; hinc non ſemper tales magnitudines ſperni poſſunt, ſed tantum relative. Hinc etiam fit, ut eadem quantitas poſſit eſſe infiniteſima diverſi ordinis reſpectu ad diverſas quantitates diverſorum ordinum.

AXIOMA III.

Si quatuor magnitudines ſint geometrice proportionales, & antecedens primae rationis ſit infiniteſimus, vel finitus, vel infinitus relate ad ſuum conſequentem; erit etiam antecedens ſecundae rationis infiniteſimus ejuſdem ordinis, vel finitus, vel infinitus relate ad ſuum conſequentem.

PROPOSITIO I.

SI duae quantitates A B, D E diffe- Fig. 1.
rant a duabus A C, D F infiniteſima quantitate; ratio A B ad D E non differt a ratione A C ad D F.

Demonſt. A C eſt ad D F in ratione compoſita C A ad A B, A B ad D E, & D E ad D F; ſed rationes C A ad A B, & D E ad D F non differunt a ratione aequalitatis. Ergo ratio B A ad D E non differt a ratione C A ad D F. *Q. E. D.*

SCHOLION.

Linea infiniteſima B poteſt referri ad Fig. 2.
aſſignabilem A duobus modis. Primum quatenus magnitudinem ejus auget, vel minuit, ſi ipſi addatur, vel dematur. Hìc vero lineola B pro nihilo habetur; quippe ex ejus additione, vel detractione nihil mutatur proportio lineae A ad aliam quamlibet aſſignabilem; vel ſi quid mutatur, mutatio eſt minor quacunque mutatione aſſignabili: atque hinc patet,

nihil

nihil referre, utrum lineola B ſit major minorve, modo ſit infiniteſima. Secundo poteſt referri lineola B ad lineam A, quatenus in ipſam infinities ingreditur, & infinities repetita ipſam conſtituit. Quod nihil ſane aliud eſt, niſi conſiderare proportionem, quam habet A ad B; quae proportio utique infinita eſt, nec ullus aſſignari poteſt tantus numerus, qui ipſam exprimat: Hic vero plurimum refert, utrum lineola B ſit major, vel minor. Etenim quamvis proportio lineae A ad lineolam B ſit infinita, tamen erit duplo major, ſi linea B fuerit duplo minor, & omnino tanto major erit proportio, quanto lineola B minor erit.

Fig. 3. Ex his illud ſequitur: ſi duabus lineis aſſignabilibus A B, C D addantur infiniteſimae duae, qualeſcunque ſint B X, D Y, proportio aſſignabilium nihil mutabitur; quippe quod ipſarum magnitudines eaedem aeſtimabuntur, quae antea. Licebit ergo ponere A X, C Y : : A B, C D.

Nihilque impediet, quominus Euclideis inſiſtens demonſtrationibus, & *in-*

ver-

vertendo argumenteris: ergo C Y, A X : : C D, A B; & *alternando*; ergo A X, A B : : C Y, C D; & componendo: Ergo A X + C Y, C Y : : A B + C D, C D; & *dividendo*: ergo A X − C Y, C Y : : A B − C D, C D &c. Idque perpetuo licebit uſquedum lineae tantum aſſignabiles A B, A X, C D, C Y, A X − C Y, A B − C D &c. in proportionalitatem venerint.

Atqui licet neque invertendo, neque alternando, neque componendo ex illa proportionalitate A X, C Y : : A B, C D ullae aliae lineae, praeter quam aſſignabiles in proportionalitatem venire poſſint; tamen dividendo prodire poterunt, & in proportionalitatem venire duae infinitesimae B X, D Y; id quod, tum demum accidet, ſi poſito A X, A B : : C Y, C D, *dividendo* argumenteris: ergo A X − A B, A B : : C Y − C D, C D. Sive B X, A B : : D Y, C D; vel quod eodem recidit: A B, B X : : C D, D Y.

Quod ſi quantitates infiniteſimae B X, D Y in proportionalitatem venerint, ar-

gumentationem illam, quam dividendo inſtituiſti, & unde infiniteſimae illae prodierunt, pro falſa habebis; niſi forte lineolae B X, D Y poſitae ab initio fuerint proportionales lineis A B, C D; vel a duabus, quae ſint iiſdem A B, C D proportionales, differant quantitate infiniteſima ordinis ſuperioris reſpectu ejus ordinis, cujus ſunt ipſae lineae B X, D Y; etenim ſi B X, & D Y ſint qualeſcunque, erit etiam qualiſcunque proportio A B ad B X; & qualiſcunque pariter erit proportio C D ad D Y a & poterunt proportiones hae duae diverſae eſſe; nec tuto poni poterit A B, B X : : C D, D Y [illegible]

Fig. 4. Quare ſi in triangulo A B C ducta ſit linea recta D E abſcindens partes infiniteſimas qualeſcunque A D, A E, licebit utique ponere A B, A C : : D B, E C, & A B, D B : : A C, E C; neque hinc tamen licebit dividendo argumentari: ergo A D, D B : : A E, E C; niſi ab initio poſita fuerit linea recta D E parallela rectae B C, vel diſcrepans a vero paralleliſmo quantitate

infi-

infiniteſima, abſcindens lineolas D A, E A eandem habentes inter ſe proportionem, quam habent lineae rectae A B, A C.

PROPOSITIO II.

Poſita ſerie finita quantitatum ejuſdem ordinis continue proportionalium B A, C D, M N &c. cujus duo proximi termini B A, C D differant quantitate infiniteſima S D: dico omnes proximos terminos finitae ſeriei differre quantitate infiniteſima ejuſdem ordinis. Fig. 5.

Demonſt. Quoniam M N eſt ad C D, ut C D ad B A; erit etiam dividendo M N—C D ad C D, ut C D—B A ad B A, hoc eſt N L erit ad C D, ut D S ad B A, & permutando N L erit ad D S, ut C D ad B A; ſed, C D, & B A ſunt ejuſdem ordinis: ergo differentiae N L, D S ſunt ſimiliter ejuſdem ordinis. Cumque eadem demonſtratio repeti poſſit per omnes terminos finitae ſeriei, ergo patet. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Per propoſitionem L N eſt ad D S, ut C D ad B A: ergo dividendo L N —S D ad S D, ut S D ad B A; adeoque differentia differentiarum L N, S D eſt infiniteſima ejuſdem ordinis reſpectu S D, ac eſt S D reſpectu B A. Idem dicito de differentiis differentiarum in infinitum.

COROLLARIUM II.

Cum differentiae S D, L N tamquam aequales conſiderari poſſint, hinc quantitates B A, C D, M N ſpectari poſſunt veluti aequidifferentes, licet ſint geometrice proportionales.

COROLLARIUM III.

Patet etiam differentiam duorum quorumcumque terminorum B A, M N praedictae ſeriei eſſe ejuſdem ordinis, ac eſt infiniteſima D S; quandoquidem differentia illa nihil aliud eſt, quam ipſa

D S repetita vicibus numero finitis, ſpretis tamen nonnullis infiniteſimis reſpectivis.

PROPOSITIO III.

SI ſint plures quantitates A, B, C, &c. ita determinatae, ut B ſit infiniteſima reſpectu A, C ſit infiniteſima reſpectu B, & ſic deinceps; dico C eſſe infiniteſimam reſpectu A ejus ordinis, qui reſultat ex ſummâ ordinis C reſpectu B, cum ordine B reſpectu A. Fig. 6.

Demonſt. Quantitas C, ut evadat ejuſdem ordinis, ac eſt quantitas A, tranſire debet per tot infinita, quot ſunt unitates in numero ordinis C reſpectu B, & in numero ordinis B reſpectu A. Ergo numerus ordinis C reſpectu A habetur ſi ſummentur numerus ordinis C reſpectu B, & numerus ordinis B reſpectu A; adeoque ordo C reſpectu A reſultat ex ſumma ordinis C reſpectu B, cum ordine B reſpectu A. *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO IV.

Fig. 7. SI ſint plures quantitates A, B, C &c. infiniteſimae cujuſcunque ordinis, erit factum omnium quantitatum praedictarum infiniteſimum ejus ordinis, qui reſultat ex ſumma ordinum quantitatum A, B, C &c.

Demonſt. Sumantur totidem quantitates aſſignabiles quaecumque a, b, c &c. quot ſunt quantitates infiniteſimae A, B, C &c. tum fiat A ad S, ut b ad B, S ad X, ut c ad C &c. Factum omnium quantitatum aſſignabilium a, b, c &c. eſt ad factum omnium quantitatum A, B, C &c. in ratione compoſita a ad A, b ad B, c ad C &c. ſeu in ratione compoſita a ad A, A ad S, S ad X &c. ſeu in ratione a ad X. Sed X reſpectu ad aſſignabilem a eſt infiniteſima ejus ordinis, qui reſultat ex ſumma ordinis X reſpectu S, & S reſpectu A, & A reſpectu a, (1) ergo factum omnium quantitatum infiniteſimarum A, B, C &c. eſt ejus ordinis, qui reſultat ex ſumma ordinum omnium quantitatum A, B, C &c. *Q. E. D.*

(1) *per 3. prop.*

PRO-

PROPOSITIO V.

IN circulo ſi anguli ad centrum, vel ad peripheriam ſunt infiniteſimi cujuſcunque ordinis; erunt etiam arcus, quibus inſiſtunt, infiniteſimi ejuſdem ordinis, & viceverſa.

Demonſt. Anguli ſive ad centrum, ſive ad peripheriam proportionales ſunt arcubus, quibus inſiſtunt, & viceverſa; ſed angulis finitis reſpondent arcus finiti, & viceverſa: ergo patet. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VI.

IN circulo arcus minor B C, & chorda B C ſunt ejuſdem ordinis. Fig. 8.

Demonſt. Sumatur arcus minor B C in peripheria circuli quoties fieri poteſt, & arcubus ducantur ſubtenſae, quae omnes aequales erunt chordae B C. Erit arcus B C ad ſummam omnium arcuum in peripheria ſumptorum, ut ſubtenſa B C ad ſummam omnium ſubtenſarum reſpondentium; Sed ſumma omnium

nium

nium arcuum, & ſumma omnium ſubtenſarum ſunt ejuſdem ordinis: ergo patet. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Ducta ex centro A recta A M ſecante bifariam arcum B C in M, haec biſecabit quoque chordam in R ad angulos rectos; adeoque C R erit ſinus rectus anguli C A M; hinc ſinus rectus, & arcus cujuſcunque anguli ſunt ejuſdem ordinis.

COROLLARIUM II.

Anguli ſive ad centrum, ſive ad peripheriam ſunt ejuſdem ordinis, ac ſunt arcus (1); ſed arcus ſunt ejuſdem ordinis, ac ſunt ſinus recti (2): ergo anguli ſunt ejuſdem ordinis, ac ſunt ſinus recti.

(1) *per hanc prop.*
(2) *per coroll. 1. huj. pro.*

COROLLARIUM III.

Hinc in triangulo rectangulo, ac proinde in triangulo quocunque, cujus anguli

guli ſunt omnes finiti latera ſunt ejuſdem ordinis.

PROPOSITIO VII.

IN triangulo rectangulo, & acutangulo unus dumtaxat angulus eſſe poteſt infiniteſimus: in triangulo verò obtuſangulo duo anguli eſſe poſſunt infiniteſimi, & quidem diverſorum ordinum.

Demonſt. prima pars. Si duo anguli eſſent infiniteſimi in triangulo rectangulo, & acutangulo; cum tertius ex hypotheſi ſit rectus, aut acutus; hinc ſumma trium angulorum in triangulo non aequaret duos rectos: quod eſt abſurdum.

Demonſt. ſecunda pars. In triangulo obtuſangulo duo anguli infiniteſimi cum angulo obtuſo poſſunt conficere ſummam duorum rectorum.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 9. IN triangulo acutangulo ſcaleno A B C ſit angulus B infiniteſimus; duorum reliquorum angulorum A, & C minor ſit C. Dico primùm differentiam anguli C ab angulo recto eſſe infiniteſimam ejuſdem ordinis, cujus eſt angulus B. Dico ſecundùm differentiam anguli A ab angulo recto poſſe eſſe infiniteſimam cujuſcunque ordinis.

Demonſt. prima pars. Ex angulo B demittatur normalis B D in baſim A C, haec normalis cadet intra triangulum A B C; erit igitur triangulum A B C diviſum in duo triangula rectangula A D B, C D B. Ergo angulus A cum angulo A B D, aequalis eſt angulo C cum angulo C B D; ſed ex hypoteſi angulus C minor eſt angulo A. Ergo angulus C B D major eſt angulo A B D; adeoque major eſt dimidio anguli A B C; hinc angulus C B D eſt infiniteſimus ejuſdem ordinis, cujus eſt angulus B; ſed angulus C B D eſt differentia anguli C ab angulo recto. Ergo angu-

angulus minor C differt ab angulo recto quantitate infiniteſima ejuſdem ordinis, cujus eſt angulus B. *Q. E. P.*

Pars ſecunda patet per ſe.

COROLLARIUM.

Hinc anguli A, & C non poſſunt differre niſi quantitate infiniteſima cujuſcunque ordinis incipiendo ab ordine anguli B.

PROPOSITIO IX.

IN triangulo rectangulo B A C ſi unus ex angulis acutis, ex. gr., C ſit infiniteſimus cujuſcunque ordinis, erit latus oppoſitum B A infiniteſimum ejuſdem ordinis; reliqua vero latera A C, B C infiniteſimum angulum comprehendentia differunt quantitate infiniteſima ordinis duplo majoris anguli C. Et viceverſa ſi unum ex lateribus angulum rectum continentibus, ex. gr., B A ſit infiniteſimum cujuſcunque ordinis; an- Fig. 10.

gulus ipſi oppoſitus C erit infiniteſimus ejuſdem ordinis.

Demonſt. prima pars. In triangulo rectangulo B A C ſit angulus A rectus, latus oppoſitum ipſi erit B C, quo poſito pro ſinu toto, erit B A ſinus rectus anguli C. Ergo latus B A eſt ejuſdem ordinis, cujus eſt angulus C. (1) *Q. E. P.*

(1) *per coroll. 2. prop. 6.*

Demonſt. ſecunda pars. Centro C intervallo C A abſcindatur C M aequalis C A: erit B M differentia laterum A C, B C; cum autem rectangulum B M in B C + C A aequetur quadrato B A; hinc ut A C + C B ad B A, ita B A ad B M. Ergo ordo rectae B M reſpectu B A, idem eſt, ac ordo rectae B A reſpectu B C; adeoque ordo rectae B M reſpectu B C eſt duplo major ordine rectae B A reſpectu ejuſdem B C, ſeu eſt duplo major ordine anguli C. *Q. E. S.*

Pars tertia. Patet ex Corollario Propoſitionis ſextae.

PRO-

PROPOSITIO X.

IN triangulo acutangulo ſcaleno B A C poſito angulo C infiniteſimo cujuſcunque ordinis, erit latus oppoſitum infiniteſimum ejuſdem ordinis; reliqua vero latera B C, A C differre poſſunt quantitate infiniteſima cujuſcunque ordinis ſuperioris, incipiendo ab ordine duplo majore anguli C; & viceverſa ſi latus unum B A ſit infiniteſimum cujuſcunque ordinis, erit angulus oppoſitus C infiniteſimus ejuſdem ordinis. Fig. 11.

Demonſt. prima pars. Ponatur angulus A minor angulo B. Quoniam angulus A ex hypotheſi eſt finitus, hinc ducta ex angulo majori B normale B R in latus C A, erunt in triangulo rectangulo A B R ſinus totus A B, & ſinus rectus B R ejuſdem ordinis (1); ſed ſinus rectus B R eſt infiniteſimus ejuſdem ordinis, ac eſt angulus C (2). Ergo latus A B erit infiniteſimum ejuſdem ordinis, ac eſt angulus C. *Q. E. P.*

(1) *per coroll. 2. prop. 6.*

(2) *per 9. prop.*

Demonſt. ſecunda Pars. Angulus acutus A differt a recto per angulum A B R infini-

inſiniteſimum ejuſdem ordinis, ac eſt angulus C (1). Ergo in triangulo rectangulo A B R recta A R eſt inſiniteſima reſpectu A B ejuſdem ordinis, cujus eſt A B reſpectu A C (2); adeoque A R eſt inſiniteſima reſpectu A C ordinis duplo majoris anguli C. Ergo recta A C excedit rectam C R quantitate inſiniteſima ordinis duplo majoris anguli C; ſed C B excedit C R quantitate inſiniteſima ordinis duplo majoris anguli C (3). Ergo latera A C, C B differre non poſſunt niſi quantitate inſiniteſima ordinis duplo majoris anguli C, vel alterius ordinis ſuperioris. *Q. E. S.*

(1) *per 8. prop.*

(2) *per pr. part. huj. propoſ.*

(3) *per 9. prop.*

Pars tertia patet ex demonſtratione primæ partis.

PROPOSITIO XI.

Fig. 12. IN triangulo obtuſangulo B A C ſi angulus unus C ſit inſiniteſimus; erit latus B A oppoſitum inſiniteſimum ejuſdem ordinis; reliqua vero latera B C, C A differunt quantitate inſiniteſima ordinis

dinis ipſius anguli C: & viceverſa ſi unus ex angulis acutis, ex. gr., B ſit finitus, & latus tantum, quod continetur inter angulum obtuſum A, & acutum finitum B ſit infiniteſimum; erit angulus C oppoſitus infiniteſimus ejuſdem ordinis.

Demonſt. prima pars. Ex angulo obtuſo A demittatur normalis A R in latus B C; erunt anguli B, & B R A, R A B finiti; hinc A B, B R, R A ſunt ejuſdem ordinis (1); ſed A R eſt ejuſdem ordinis, cujus eſt angulus C (2). Ergo B A, B R ſunt ordinis ejuſdem, cujus eſt angulus C. *Q. E. P.*

(1) *per coroll.* 3. *prop.* 6.

(2) *per* 9. *prop.*

Pars ſecunda. B C excedit C R quantitate B R infiniteſima ordinis anguli C; ſed C R non differt a C A niſi quantitate infiniteſima ordinis duplo majoris anguli C (3); hinc (cum haec ſecunda differentia ſit infiniteſima reſpectu ad primam B R) B C excedit C A quantitate infiniteſima ordinis ejuſdem, cujus eſt angulus C. *Q. E. S.*

(3) *per* 9. *prop.*

Pars tertia patet ex demonſtratione primae partis.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Fig. 13. IN triangulo obtuſangulo A B C, in quo angulus unus C eſt infiniteſimus, ſi angulus obtuſus A B C major ſit angulo recto, quantitate infiniteſima ordinis cujuſcunque ſuperioris; incipiendo ab ordine anguli C incluſive, erit differentia laterum infiniteſimum angulum comprehendentium infiniteſima ordinis duplo majoris anguli C; ſi vero angulus obtuſus A B C major ſit angulo recto quantitate infiniteſima ordinis inferioris relate ad ordinem anguli C; differentia laterum C A, C B erit infiniteſima ordinis, qui reſultat ex ſumma ordinis anguli C cum ordine differentiae anguli B A C a recto.

Demonſt. prima pars. Ex puncto B erigatur normalis B S ad B C; erit angulus A B S differentia anguli A B C a recto. Quoniam angulus A B S, vel eſt infiniteſimus ejuſdem ordinis, ac eſt angulus C, vel ordinis ſuperioris per ſuppoſitionem; hinc in triangulo obtuſangulo A S B erit A S reſpectu A B,

vel

vel infiniteſima ordinis anguli C, vel ordinis ſuperioris; (1) adeoque A S reſpectu B C vel erit infiniteſima ordinis duplo majoris anguli C, vel ordinis ſuperioris (2). Ergo, cum S C excedat B C quantitate infiniteſima ordinis duplo majoris anguli C (3), A C excedit B C quantitate infiniteſima ordinis duplo majoris anguli C. *Q. E. P.*

(1) *per* 11. *prop.*

(2) *per* 3. *prop.*

(3) *per* 9. *prop.*

Demonſt. ſecunda pars. A S reſpectu A B eſt infiniteſima ordinis anguli A B S; A B reſpectu B C eſt infiniteſima ordinis anguli C. Ergo A S reſpectu B C eſt infiniteſima ordinis anguli A B S ſummati cum ordine anguli C (4); ſed S C excedit C B quantitate infiniteſima ordinis duplo majoris anguli C. Ergo, cum haec infiniteſima ſit reſpectu A S, erit A S differentia inter latera A C, B C infiniteſima ordinis, qui reſultat ex ordine anguli A B S ſummato cum ordine anguli C. *Q. E. S.*

(4) *per* 3. *prop.*

SCHOLION.

Ex omnibus triangulis angulum unum

infiniteſimum habentibus, ſi fuerit iſoſcele, erit differentia laterum angulum infiniteſimum continentium abſolute nulla; ſi fuerit acutangulum ſcalenum, differentia laterum eſſe poteſt cujuſcunque ordinis ſuperioris, incipiendo ab ordine duplo majore anguli infiniteſimi. Si fuerit rectangulum, vel obtuſangulum, in quo angulus obtuſus major eſt recto quantitate infiniteſima cujuſcunque ordinis ſuperioris, incipiendo ab ordine anguli infiniteſimi trianguli, erit differentia laterum ordinis duplo majoris anguli infiniteſimi; ſi fuerit obtuſangulum, in quo angulus obtuſus major eſt recto quantitate infiniteſima ordinis inferioris relate ad ordinem anguli infiniteſimi trianguli, erit differentia laterum ordinis, qui reſultat ex ordine anguli infiniteſimi trianguli ſummato cum ordine differentiae anguli obtuſi a recto. Si tandem angulus ſit finite obtuſus, differentia erit ordinis anguli infiniteſimi.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

IN triangulo obtuſangulo A B C, ſi duo anguli A, & C ſint infiniteſimi ejuſdem ordinis, omnia latera ſunt ejuſdem ordinis; differentia vero lateris A C obtuſo angulo B oppoſiti a lateribus A B, B C obtuſum angulum continentibus eſt infiniteſima ordinis duplo majoris angulorum A, & C: viceverſa ſi in triangulo obtuſangulo A B C latera A B, B C, C A ſunt ejuſdem ordinis, & angulus B differat a duobus rectis quantitate infiniteſima, erunt anguli A, & C *infiniteſimi ejuſdem ordinis*. Fig. 14.

Demonſt. prima pars. Ex angulo obtuſo B in baſim A C demittatur normalis B S; haec reſpectu ad latus B C erit infiniteſima ejuſdem ordinis, ac eſt angulus C; ſimiliter B S reſpectu A B eſt infiniteſima ejuſdem ordinis, ac eſt angulus A (1); ſed anguli A, & C ſunt ejuſdem ordinis per ſuppoſitionem; ergo normalis B S eſt ejuſdem ordinis, tum reſpectu B C, tum reſpectu B A; ergo

(1) per 9. prop.

latera B C, B A ſunt ejuſdem ordinis; quod tertium A C ſit ejuſdem ordinis, ac ſunt B A, B C, per ſe clarum eſt. Patet igitur *Q. E. P.*

Demonſt. ſecunda pars. B C differt a C S quantitate infiniteſima ordinis duplo majoris anguli C, ſeu anguli A; ſimiliter A B differt ab A S quantitate infiniteſima ordinis duplo majoris anguli A (1). Ergo B A + B C differt ab A C quantitate infiniteſima ordinis duplo majoris anguli A, vel C. *Q. E. S.*

(1) *per 9. prop.*

Pars tertia patet ex prima.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 14.

IN triangulo obtuſangulo A B C, ſi duo anguli A, & C ſint infiniteſimi diverſorum ordinum; erit latus B A oppoſitum angulo C infiniteſimo ordinis ſuperioris & ipſum infiniteſimum; & quidem ejus ordo habetur, ſi ſubtrahatur ordo anguli A ab ordine anguli C. Latera vero B C, C A angulum infinite-

nitesimum C comprehendentia differunt quantitate A B. Viceverſa ſi latus B A ſit infiniteſimum, & angulus B differat a duobus rectis quantitate infiniteſima; erit angulus oppoſitus C infiniteſimus: & quidem ejus ordo habetur, ſi ſummetur ordo lateris A B cum ordine anguli, quo differt angulus B a duobus rectis.

Demonſt. prima pars. Ex angulo obtuſo B in latus A C demittatur normalis B S. Ordo rectae B S reſpectu B C idem eſt, ac ordo anguli C (1). Ergo recta B S, ut evadat ejuſdem ordinis, cujus eſt B C, tranſire debet per tot infinita, quot ſunt unitates in numero ordinis anguli C; ſimiliter recta B S reſpectu B A eſt infiniteſima ejuſdem ordinis, cujus eſt angulus A (2). Ergo B S, ut ſit ejuſdem ordinis, ac eſt B A, tranſire debet per tot infinita, quot ſunt unitates in numero ordinis anguli A. Ergo recta A B, ut ſit ejuſdem ordinis, cujus eſt B C, tranſire debet per tot infinita, quot ſunt unitates in differentia ordinis anguli A ab ordine anguli C. *Q. E. P.* De-

(1) *per 9. prop.*

(2) *per 9. prop.*

Demonſt. ſecunda pars. Quoniam angulus A eſt infiniteſimus, rectae A B, A S differunt quantitate infiniteſima ordinis duplo majoris anguli A relate ad A B, quemadmodum rectae C B, C S differunt quantitate infiniteſima ordinis duplo majoris anguli C; ergo, cum A S, ſeu A B ſit differentia laterum A C, S C, erit etiam differentia laterum A C, B C ſpretis nonnullis infiniteſimis reſpectivis. *Q. E. S.*

Pars tertia patet ex prima.

PROPOSITIO XV.

Fig. 14. IN triangulo obtuſangulo A B C, in quo ſunt duo anguli A, & C infiniteſimi diverſi ordinis, erit differentia, quae intercedit inter latus A C obtuſo angulo oppoſitum, & latera A B, B C obtuſum angulum continentia, infiniteſima ejus ordinis, qui reſultat ex ſumma ordinum angulorum A, & C.

Demonſt. Differentia, quae intercedit inter A S, & A B eſt infiniteſima ordinis

dinis duplo majoris anguli A (1) relate ad A B; ſed A B relate ad A C eſt infiniteſima ordinis, qui reſultat ex ſubtractione ordinis anguli A ab ordine anguli C (2). Ergo differentia, quae intercedit inter latera A S, A B, eſt infiniteſima ordinis, qui reſultat ex ſumma ordinis anguli A, cum ordine anguli C (3). Differentia, quae intercedit inter latera B C, C S eſt infiniteſima ordinis duplo majoris anguli C (4). Igitur, cum haec differentia infiniteſima ſit relate ad primam, erit illa differentia, quae intercedit inter latus A C, & latera A B, B C. *Q. E. D.*

(1) *per* 9. *prop.*

(2) *per* 14. *prop.*

(3) *per* 3. *prop.*

(4) *per* 9. *prop.*

PROPOSITIO XVI.

IN triangulo rectangulo, & acutangulo, in quo angulus unus eſt infiniteſimus, reliqui anguli pro aequalibus accipi poſſunt; minime vero in triangulo obtuſangulo, in quo angulus unus eſt infiniteſimus.

Prima pars patet ex natura trianguli rectan-

rectanguli, & ex corollario propoſitionis octavae. Altera pars per ſe eſt manifeſta.

SCHOLION.

Haec propoſitio, licet per ſe clara, attamen ſedulo perpendenda eſt; multum enim conducit ad evitandos paralogiſmos, dum agitur de quantitatibus infiniteſimis. Etenim innuit, quod licet aliqua figura ſpretis quantitatibus infiniteſimis poſſit habere nonnullas proprietates communes aliis figuris, nihilominus non ſequitur illam habere omnes proprietates iſtarum figurarum. Sic, ex. gr., ex propoſitionibus IX., X., XI. ſpretis quantitatibus infiniteſimis, quibus differunt latera angulum infiniteſimum comprehendentia, ſequitur latera illa eſſe aequalia; ac proinde triangula in hoc caſu habere praecipuam proprietatem trianguli iſoſcelis: male ex hoc quis concluderet praedicta triangula habere omnes proprietates trianguli aequicruris; ut videre eſt potiſſimum in triangulo

obtuſan-

obtuſangulo, in quo angulus unus eſt infiniteſimus. Sic etiam per propoſitionem praeſentem in triangulo rectangulo, in quo angulus unus eſt infiniteſimus, reliqui anguli, ſpretis differentiis infiniteſimis, ſunt aequales. Ex hoc tamen colligendum non eſt, triangulum illud habere reliquas proprietates trianguli aequicruris; quod ſic demonſtro. Proprietas una trianguli aequicruris eſt, quod, ducta ex vertice in baſim normale, baſis biſecetur; haec proprietas non verificatur in triangulo rectangulo, in quo angulus unus eſt infiniteſimus. Igitur omnes *proprietates, quae de aliqua figura*, ſpretis infiniteſimis, adſtruuntur, rigoroſo ratiocinio ſunt demonſtrandae.

PROPOSITIO XVII.

IN triangulo A B C, in quo omnes anguli ſunt finiti, ſi latus unum C B augeatur, vel minuatur infiniteſima quantitate C D; dico angulum A oppoſitum augeri, vel minui, & angulum C ex Fig. 15.

 parte

parte fluxionis C D viceverſa minui, & augeri quantitate infiniteſima ejuſdem ordinis; latus A C ex parte fluxionis C D, & totum triangulum B A C ſimiliter augeri, vel minui quantitate infiniteſima ejuſdem ordinis.

Demonſt. pars prima. Ex puncto C in A D, ſi opus eſt, productam demittatur normalis C R. Cum hypothenuſa C D ſit infiniteſima, & anguli R C D, R D C ſint finiti; erunt C R, R D infiniteſimae ejuſdem ordinis (1); adeoque angulus C A R eſt infiniteſimus ejuſdem ordinis (2), ſicuti & triangulum C A D. Ergo angulus B A C auctus eſt, vel imminutus; & viceverſa angulus A C B imminutus eſt, vel auctus quantitate C A D infiniteſima ejuſdem ordinis, ac eſt C D. *Q. E. P.*

(1) *per coroll. 3. prop. 6.*

(2) *per 9. prop.*

Demonſt. ſecunda pars. Quoniam triangulum C A D eſt infiniteſimum ejuſdem ordinis, cujus eſt C D; erit triangulum B A C auctum, vel imminutum infiniteſima quantitate ejuſdem ordinis, cujus eſt C D; & cum A R non differat ab A C, niſi quantitate infiniteſima ordi-

ordinis duplomajoris C R, ſeu C D (1), & R D ſit infiniteſima ejuſdem ordinis, cujus eſt C D; hinc A C aucta eſt, vel imminuta quantitate infiniteſima ejuſdem ordinis, cujus eſt C D. *Q. E. S.*

(1) *per 9. prop.*

SCHOLION.

Facile demonſtrari poteſt, ſi angulus B A C, aut triangulum B A C, manente latere A B, & angulo B, augeatur, vel minuatur infiniteſima quantitate; etiam latus B C augeri, vel minui infiniteſima quantitate ejuſdem ordinis; ac proinde verificari inverſam propoſitionem.

PROPOSITIO XVIII.

SI duo latera B D, B E trianguli B D E augeantur, vel minuantur proportionaliter infiniteſima quantitate, etiam latus D E, & triangulum B D E augebitur, vel minuetur quantitate infiniteſima ejuſdem ordinis. Fig. 16.

Prima pars patet.

Demonſt. ſecunda pars. Triangulum D B E eſt ad triangulum A B C, ut quadratum B E eſt ad quadratum B C, ſeu ut B E ad M tertiam proportionalem poſt B E, B C; ergo dividendo trapetium D A C E eſt ad triangulum A B C, ut B E — M ad M; ſed B E — M eſt infiniteſima ejuſdem ordinis, cujus eſt C E (1). Ergo trapetium D A C E eſt infiniteſimum ejuſdem ordinis, cujus eſt C E. *Q. E. S.*

(1) *per coroll. 3. prop. 2.*

PROPOSITIO XIX.

Fig. 17. SI latera B D, B H rectanguli B A augeantur, vel minuantur infiniteſima quantitate B G, B F, dico in primo caſu rectangulum A B augeri rectangulis B D in B F, B H in B G, F B in B G; in altero caſu minui rectangulis B D in B F, B H in B G minus rectangulo F B in B G.

Demonſtratio utriuſque partis patet ex ſola inſpectione figurae.

SCHO-

SCHOLION I.

Ex ſola inſpectione etiam figurae ſolidae, ſi adeſſet, conſtaret differentiale parallelepipedi facti a rectis A, B, C, auctis quantitatibus infiniteſimis S, X, Z, eſſe parallelepipeda B A Z, B C S, A C X, S X C, X Z A, S Z B, S X Z. Hinc facile erui poteſt differentiale facti plurium quantitatum A, B, C, D, &c. contineri ſumma productorum ex ſingulis differentialibus quantitatum A, B, C, D, &c. in factum omnium quantitatum, excluſa illa, cujus eſt differentiale, una cum ſumma productorum ex omnibus ambis differentialium in factum omnium quantitatum, excluſis illis, quarum ſunt differentialia ambi, & ſic deinceps ex omnibus ternis, quaternis, quinternis, &c. uſque ad factum omnium differentialium. Fig. 18.

SCHOLION II.

Cum autem ſummae productorum ex omnibus ambis, ternis, quaternis, &c.

dif-

differentialium in facta reſpectiva quantitatum aſſignabilium, juxta ſcholion praecedens, ſint infiniteſimae relate ad ſummam productorum ex ſingulis differentialibus in factum omnium quantitatum aſſignabilium, excluſa illa, cujus eſt differentiale (poſitis tamen diferentiis ejuſdem ordinis); hinc ſummae illae relate ad hanc ſpernuntur. Verum aliquando evenit, ut ſumma haec ſit nulla, & in hoc caſu non erit ſpernenda ſumma productorum ex omnibus ambis &c.; & ſi haec pariter ſit nulla, tunc non erit deſpicienda ſumma productorum ex omnibus ternis &c., & ſic deinceps uſque ad ultimum factum ex omnibus differentialibus. En exemplum, quo declaratur quomodo fieri poſſit, ut factum ex ſingulis differentialibus &c. ſit nullum: latus B D quadrati A B minuatur infiniteſima quantitate B G; erit quadratum A B imminutum rectangulo infiniteſimo H G ordinis G B: latus L G augeatur infiniteſima quantitate G F aequali B G; rectangulum A G auctum erit rectangulo D F infiniteſimo ordinis G F; ſed rectan-

Fig. 17.

rectangulum H G excedit rectangulum G E quadrato G B infiniteſimo relate ad ipſa rectangula. Ergo differentia ordinis G B evadit nulla, & remanet differentia ordinis duplo majoris G B. Verum haec clarius per analyſim infiniteſimorum comprehenduntur.

PROPOSITIO XX.

Potentiae eaedem rectarum A B, D C, quae differunt quantitate infiniteſima L A, & ipſae differunt quantitate infiniteſima ejuſdem ordinis; & viceverſa. Fig. 19.

Demonſt. prima pars. Potentia rectae A B eſt ad potentiam rectae D C, ut B A ad unam M ex continue proportionalibus poſt B A, D C in ſerie finita; ergo dividendo potentia B A minus potentia D C eſt ad potentiam D C, ut B A minus M ad M. Sed B A minus M eſt infiniteſima ejuſdem ordinis L A (1). Ergo differentia potentiarum eſt infiniteſima ejuſdem ordinis. *Q. E. P.*

(1) *per coroll. 3. prop. 2.*

Pars

Pars ſecunda fere eodem modo demonſtratur.

COROLLARIUM.

Hinc differentiae quadratorum, circulorum, cuborum, ſphaerarum habentium radices, vel radios, qui differunt quantitate infiniteſima, erunt & ipſae infiniteſimae ejuſdem ordinis.

SCHOLION.

Haec propoſitio applicari etiam poteſt polygonis ſimilibus, quorum latera relative differunt quantitate infiniteſima, tum ejuſdem ordinis, tum diverſorum; ſed in hac ultima ſuppoſitione aliqua cautio eſt adhibenda; etenim ad evitandos paralogiſmos juvat recurrere ad quadrata totius periphaeriae polygonorum, vel ad quadrata laterum, quae differunt quantitate infiniteſima ordinis inferioris. Ratio hujus rei invenietur, ſi polygona in triangula ſimilia dividantur, & ſi reiterentur propoſitiones XIX. & XX. libri

ſexti

ſexti Euclidis: & hìc rurſus adverto non eſſe praecipitoſo ratiocinio concludendum, figuras, quae, ſpretis infiniteſimis, habent aliquam proprietatem aliis communem, habere etiam omnes; ſed prius videndum eſt, num differentiae illae infiniteſimae turbent demonſtrationes, quibus probatur unam ab alia profluere.

APPENDIX.

QUoniam rectae a vero paralleliſmo declinantes quantitate infiniteſima, acceptae a minus cautis pro parallelis facilem viam ſternant ad paralogiſmos; hinc propoſueram ſupprimere phraſim illam: *accipi poſſunt, ut parallelae:* contentus dumtaxat monuiſſe, recurſum eſſe habendum ad doctrinam triangulorum expoſitam, ex qua pendet illa rectarum parallelarum, quando iſtarum proprietates examinandae occurrunt cum differentiis infiniteſimis. Verum, ut clarius paralogiſmorum fontes adpareant, operae pretium duxi ſequentia, in hac appendice, de rectis parallelis exponere.

Fig. 20. Parallelifmus rectarum A X, D Y duas conditiones comprehendit. Prima eſt, quod in utramlibet partem quamtumvis productae nunquam concurrant. Altera eſt, quod diſtantiae duae, ubi vis, ſumptae A D, Z E aequales plane ſint. Hinc omnes parallelarum proprietates ducuntur.

Declinabunt lineae rectae A X, D Y a paralleliſmo infinite parum, ſi inclinetur A X ſic, ut tranſeat in A T, ſitque angulus X A T infiniteſimus: Quo poſito concurrent A T, D T ad diſtantiam infinitam E T, & diſtantiae A D, C E different differentia infiniteſima Z C, ſive A B. Cenſebuntur autem A T, D T habere utramque paralleliſmi conditionem: primam, quia ad nullam aſſignabilem diſtantiam concurrunt: alteram, quia diſtantiae A D, C E pro aequalibus, cum differentia ſit infiniteſima, haberi poſſunt.

In hoc autem illud excipe: ſi, ſumpta D R infinita, minori tamen, quam D T, notaretur diſtantia V R; differentia profecto inter A D, & V R eſſet aſſi-

aſſignabilis; neque profecto diſtantiae A D, V R poſſent haberi pro aequalibus.

Quare donec intervallum D E inter diſtantias A D, C E erit aſſignabile, diſtantiae ipſae A D, C E haberi poterunt pro aequalibus, & tractus A C, D E ſervabunt alteram paralleliſmi conditionem; ſed ſi intervallum D R ſit infinitum, quoniam diſtantiae A D, V R nequaquam pro aequalibus haberi poterunt, tractus A V, D R carebunt ſecunda conditione paralleliſmi, primam conditionem ſervabunt; eſt enim angulus T infiniteſimus, ideoque diſtantia R T, ad quam concurrunt A V, D R, infinita ſit oportet, ſi cum R V comparetur. Igitur ſi lineas rectas parallelas ex prima conditione definias, erunt A V, D R parallelae; ſi ex ſecunda, non erunt. Si qui autem de paralleliſmo rectarum A V, D R contendere velit, videat, ne quaeſtionem de nomine inſtituat.

Illud vero ad rem maxime pertinet. Rectae A V, D R (ſive parallelae dicantur, ſive non) hoc certe habent,

quod, ducta, ubi vis, G L, quae ſecet A V in G, D R in L, anguli alterni D L G, L G T ſunt aequales; nam, cum angulus D L G, ut externus, ſit aequalis duobus internis, & oppoſitis L G T, L T G, ſitque L T G infiniteſimus, poteſt D L G aequalis cenſeri angulo L G T. Habent ergo lineae rectae A V, D R hanc utique proprietatem, aliaſque, quae maxime in parallelis celebrari ſolent; quaeque non ex aequalitate diſtantiarum A D, V R pendent, ſed ex ſola infinita parvitate anguli T.

Haec hactenus dixi ponens A B quidem *infiniteſimam*, C B vero, & C E aſſignabiles. Videamus jam paralleliſmo quid fiat, ſi tres rectae A B, C B, C E ponantur vel omnes infiniteſimae, vel tantum aliquae. Fortaſſe expedientur omnia quatuor Theorematis.

THEOREMA I.

SI ſit A B infiniteſima, tum reſpectu C B, tum reſpectu C E, tractus A C, D E habere cenſebuntur utramque paralleliſmi conditionem. Primam, quia, cum ſit A B infiniteſima reſpectu C B, erit infiniteſimus angulus A C B; ergo etiam angulus T; ergo erit E T infinita reſpectu E C; ergo A C, D E concurrent ad diſtantiam infinitam. Secundam, quia, cum A B infiniteſima ſit reſpectu C E, poterunt A D, C E haberi pro aequalibus.

SCHOLION.

Si ſumpſeris E R infinitam reſpectu E C, ſed minorem, quam T E, ac notaveris diſtantiam R V; tractus A V, D R habebunt primam conditionem paralleliſmi propter angulum infiniteſimum T. Non habebunt ſecundam; nam, ut patet, non poterunt A D, V R ſumi pro aequalibus.

SCHO-

SCHOLION ALTERUM.

Quamvis A V, D R careant ſecunda conditione paralleliſmi, tamen ſi G L ſecet A V in G, D R in L, erunt anguli alterni G L D, L G T aequales; ſcilicet propter angulum infiniteſimum T.

THEOREMA II.

SI ſit A B infiniteſima reſpectu C B, non vero reſpectu C E; tractus A C, D E habebunt primam conditionem paralleliſmi, non vero ſecundam. Habebunt primam, quia, cum ſit A B infiniteſima reſpectu C B, erit angulus A C B infiniteſimus; ergo etiam angulus T erit infiniteſimus; ergo erit E T infinita reſpectu E C; ergo lineae A C, D E concurrent ad diſtantiam infinitam. Non habebunt ſecundam, quia cum A B non ſit infiniteſima reſpectu C E, non poterunt A D, C E ſumi pro aequalibus.

SCHOLION.

Ubicumque tamen ducatur G L ſecans A T in G, D T in L, anguli alterni G L D, L G T erunt aequales propter angulum infiniteſimum T.

THEOREMA III.

SI ſit A B infiniteſima reſpectu C E, non vero reſpectu C B; tractus A C, D E carebunt prima conditione paralleliſmi; habebunt ſecundam &c.

Carebunt prima, quia cum A B non ſit infiniteſima reſpectu C B, angulus A C B erit aſſignabilis; ergo etiam angulus T; ergo E T non erit infinita reſpectu E C; ergo A C, D E non concurrent ad diſtantiam infinitam. Habebunt ſecundam, quia, cum ſit A B infiniteſima reſpectu C E, poterunt A D, C E haberi pro aequalibus.

SCHOLION.

Ubicumque ducatur G L, ut ſupra, anguli alterni minime pro aequalibus haberi poterunt, cum ſit angulus T aſſignabilis.

THEOREMA IV.

SI A B non ſit infiniteſima neque reſpectu C B, neque reſpectu C E; tractus A C, D E neutram habebunt paralleliſmi conditionem.

Ac ducta G L, ut ſupra, anguli alterni minime ſumi poterunt pro aequalibus.

Haec ſatis patent ex dictis.

ELEMEN-

ELEMENTA
GEOMETRIAE
INFINITESIMORUM

LIBER SECUNDUS.

PROPOSITIO I.

IN circulo, poſito arcu C M infiniteſimo cujuſcunque ordinis, erunt tangens C S, chorda C M, ſinus rectus L M infiniteſima ejuſdem ordinis; pars S M ſecantis B S ſupra radium B M, & ſinus verſus C L erunt infiniteſima ordinis duplo majoris anguli C B M, ſeu arcus C M. Fig. 1.

Demonſt. prima pars. Cum arcus C M ſit infiniteſimus, erit angulus C B M infiniteſimus ejuſdem ordinis (1); ſed anguli B C M, B M C, & B C S, C S B ſunt finiti; ergo S C, C M, M L ſunt infiniteſima ejuſdem ordinis anguli C B M, ſeu arcus C M relate ad diametrum finitam C B (2). *Q. E. P.*

Demonſt. ſecunda pars. In triangulo rectangulo B C S, quia angulus C B S eſt infiniteſimus, erit M S ordinis duplo majoris tangentis C S (3), ſeu arcus C M; ergo quia L M parallela eſt

(1) *per 5. prop. lib. 1.*

(2) *per prop. 9. & 10. lib. 1.*

(3) *per prop. 9. lib. 1.*

C S, erit C L infiniteſima ordinis duplo majoris arcus C M. *Q. E. S.*

COROLLARIUM.

B M eſt ad B L, ut M S eſt ad C L; dividendo C L eſt ad L B, ut M S — C L eſt ad C L; ſed C L eſt infiniteſima ordinis duplo majoris arcus C M; ergo differentia inter M S, & C L eſt ordinis duplo majoris ordinis rectae C L, ſeu quadruplo majoris arcus C M.

SCHOLION.

Claritatis gratia in decurſu hujus libri ſuppono arcum C M eſſe infiniteſimum primi ordinis, licet demonſtrationes extendi poſſint ad ordines ſuperiores, ut attendenti patebit.

PRO-

PROPOSITIO II.

IN circulo, poſito arcu M N infiniteſimo primi ordinis, ſegmentum M X N terminatum ab arcu M X N, & ejus chorda M F N, & trilineum M X N C terminatum ab arcu M X N, tangente M C, & intercepta C N, erunt infiniteſima tertii ordinis. Fig. 2.

Demonſt. prima pars. Ex centro S ducatur S F X normalis ad M N, conjungantur M X, X N; erit F X ſecundi ordinis infiniteſimorum (1). Ergo rectangulum M N in F X erit infiniteſimum tertii ordinis (2); ſed ſegmentum M X N F mediat inter rectangulum M N in F X, & triangulum M X N, ſeu dimidium praedicti rectanguli. Igitur, cum rectangulum M N in F X, & ejus dimidium M X N ſint infiniteſima tertii ordinis, erit etiam ſegmentum M X N F & ipſum infiniteſimum tertii ordinis. *Q. E. P.*

(1) *per primam propoſitionem.*

(2) *per prop. 4. lib. I.*

Demonſt. ſecunda pars. Ex puncto N ducatur tangens L N; erunt M L, L N aequales; ſimiliter L N, & L C non

dif-

differunt niſi quantitate infiniteſima reſpective; nam in triangulo rectangulo L N C angulus N L C eſt infiniteſimus; ergo etiam L C non differt ab L M niſi quantitate infiniteſima reſpective; ac proinde triangula C M N, L N C ſunt ejuſdem ordinis; ſed triangulum M N C eſt infiniteſimum ſecundi ordinis relate ad triangulum C M S, ſeu infiniteſimum tertii relate ad quantitatem aſſignabilem. Ergo triangulum N L C eſt infiniteſimum tertii ordinis: cum autem trilineum M X N C mediet inter triangulum M Ç N, & triangulum L C N, erit & ipſum infiniteſimum tertii ordinis. *Q. E. S.*

PROPOSITIO III.

Fig. 3. IN circulo, poſito arcu N M infiniteſimo primi ordinis, tangens M C, arcus M N, chorda M N, ſinus rectus G N differunt quantitate infiniteſima tertii ordinis.

Demonſt. Tangens M C, arcus M N, chor-

chorda M N ſunt, ut triangulum M S C, ſector circuli M S N X, & quadrilaterum S M X N; ſed iſta differunt quantitate infiniteſima tertii ordinis; nam trilineum M X N C, & ſegmenta M X, X N ſunt infiniteſima tertii ordinis (1). Ergo & illa differunt quantitate infiniteſima tertii ordinis; cum omnes termini tam in prima, quam in ſecunda ſerie ſint infiniteſimi primi. Quod chorda M N excedat ſinum rectum N G infiniteſima quantitate tertii ordinis patet (2). *Q. E. D.*

(1) *per* 2. *prop.*

(2) *prop.* 9. *lib.* 1.

PROPOSITIO IV.

IN *Triangulo A B C obtuſangulo, in quo duo anguli A, & C ſunt infiniteſimi, erunt latera A B, B C in ratione angulorum oppoſitorum.* Fig. 4.

Demonſt. Per punctum C ducatur C L parallela ad A B, quæ concurrat cum B S (normali ex angulo obtuſo B ad rectam A C) producta in L, & centro C intervallo C S deſcribatur arcus M S N. Recta A B eſt ad rectam B C, ut A S

eſt

(1) prop. 9. lib. 1. (2) per 3. prop.

eſt ad S C (1), ſeu ut B S eſt ad S L, ſeu ut arcus S M eſt ad arcum S N (2), ſeu ut angulus B C A eſt ad angulum A C L, ſeu ut angulus B C A eſt ad angulum A. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Hinc duo triangula rectangula A S B, C S B, quae habent eandem altitudinem, & angulum iſti oppoſitum infiniteſimum, habent etiam baſes A S, S C; ac proinde hypothenuſas A B, B C in ratione reciproca angulorum infiniteſimorum.

COROLLARIUM II.

Fig. 5. 6. 7. 8.

Quin immo ſi duo triangula A L M, O B C habeant duo latera A L, B O aequalia, angulos A L M, O B C circumjacentes lateribus A L, B O habeant ſimiliter aequales, & angulos M, & C praedictis lateribus oppoſitos habeant infiniteſimos; habent etiam latera L M, C B, & A M, O C in ratione reciproca angulorum infiniteſimorum.

Ete-

Etenim ex punctis A, & O ducantur normales A Q, O P ad rectas L M, C B productas, ſi opus eſt; cum anguli M L A, C B O ſint aequales, & anguli Q, & P ſint recti, erunt etiam aequales anguli L A Q, B O P; adeoque in triangulis Q A L, B O P, cum ſint etiam rectæ A L, B O aequales, erunt etiam aequales normales A Q, O P; hinc latera A M, O C, & Q M, P C ſunt in ratione reciproca angulorum infiniteſimorum M, & C; ſed Q M non differt ab L M, P C non differt a B C; ergo etiam L M, B C ſunt in ratione reciproca angulorum infiniteſimorum M, & C.

SCHOLION.

Advertendum eſt hanc propoſitionem cum ſuis corollariis verificari, ſpretis nonnullis differentiis infiniteſimis, non vero abſolute.

PROPOSITIO V.

Fig. 3. POſitis, quae ſupra poſuimus propoſitione tertia, differentia ſinus recti G N a chorda M N non differt a quarta parte differentiae ſinus recti G N a tangente M C.

Demonſt. Ex puncto N ducatur N R normalis ad tangentem M C, erit R C differentia ſinus recti a tangente: tum centro M intervallo M N abſcindatur M Q a tangente M C, erit R Q differentia ſinus recti a chorda. Cum S M ſit ad M C, ut N R ad R C, erit rectangulum S M in R C aequale rectangulo M C in R N: ſimiliter cum M Q + M R ſit ad R N, ut R N ad R Q, & M Q + M R non differat a 2 M R, ſeu a recta O N, hinc ratio O N ad N R non differt a ratione N R ad R Q; ſed ratio O N ad N R, ſeu ad G M, eadem eſt, ac ratio 2 G A ad G N, ſeu M R. Ergo ratio 2 G A ad M R non differt a ratione N R ad R Q; ſed ratio 2 G A ad M R non differt a ratio-

ratione 2 M A ad M R, & ratio 2 M A ad M R non differt a ratione 2 M A ad M C. Ergo ratio 2 M A ad M G non differt a ratione R N ad R Q; adeoque rectangulum 2 M A in R Q non differt a rectangulo M C in R N, ſeu a rectangulo S M in R C; & per conſequens 2 M A eſt ad M S, ut R C ad R Q; ſed M S eſt quarta pars 2 M A. Ergo R Q non differt a quarta parte R C. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc differentia ſinus recti G N a chorda M N non differt a tertia parte differentiae chordae M N a tangente M C.

PROPOSITIO VI.

Sit A O S M quadrans circuli C M L, in radio A O ſumantur duo puncta P, Q, per quae ducantur duae ordinatae normales ad A O, & intercipientes Fig. 9.

arcum M N infiniteſimum primi ordinis, diſſitum ab extremitatibus quadrantis A S arcubus finitis M A, N S; dico differentiam abſciſſarum A P, A Q, & ordinatarum P M, Q N eſſe quantitatem infiniteſimam primi ordinis.

Demonſt. Ordinata N Q producatur uſquedum concurrat cum circulo in L, & ex puncto M ducatur M G parallela ad radium A O, quæ producatur uſquedum concurrat cum circulo in C; erit P Q, ſeu G M differentia abſciſſarum A P, A Q, & G N erit differentia ordinatarum P M, Q N. Cum ex hypotheſi arcus N S, M A ſint finiti, erunt etiam arcus C N, L M finiti; hinc anguli C M N, L N M ſunt finiti; adeoque in triangulo rectangulo M G N omnes anguli ſunt finiti, & per conſequens latera M N, M G, G N ſunt ejuſdem ordinis (1); ſed arcus M N, ac proinde chorda M N eſt infiniteſima primi ordinis per ſuppoſitionem. Ergo etiam latera M G, G N, ſeu differentia ordinatarum, & abſciſſarum erit infiniteſima primi ordinis. *Q. E. D.*

(1) *per corol.* 3. *prop.* 6, *lib.* 1.

CO-

COROLLARIUM.

Si arcus N S ſit infiniteſimus, erit arcus M S infiniteſimus primi ordinis; ac proinde arcus C S cum arcu N S, ſeu arcus C N erit infiniteſimus primi ordinis; hinc angulus C M N erit infiniteſimus primi ordinis; adeoque G N reſpectu N M erit infiniteſima primi ordinis (1); ſed N M eſt infiniteſima primi ordinis; ergo G N erit infiniteſima ſecundi ordinis. Si vero arcus M A ſit infiniteſimus, erit arcus A N, ac proinde arcus L A infiniteſimus primi ordinis; adeoque etiam arcus L M, & per conſequens angulus L N M erit infiniteſimus primi ordinis; ergo G M reſpectu M N erit infiniteſima primi ordinis (2); ſed M N eſt infiniteſima primi ordinis; ergo G M erit infiniteſima ſecundi ordinis.

(1) *per 9. prop. lib. 1.*

(2) *per 9. prop. lib. 1.*

PRO-

PROPOSITIO VII.

Fig. 10. SIt M S arcus circuli L M N infiniteſimus primi ordinis, cui ſubſtendatur chorda M S; per punctum M ducatur M R tangens circulum, & per punctum S ducatur utcumque recta N S ſecans circulum extra arcum infiniteſimum M S, & concurrens cum tangente M R; dico angulum M S R factum a chorda M S cum ſecante N S producta vel eſſe infinitum, vel infiniteſimum primi ordinis; angulum N R M factum a ſecante N R, & tangente M R vel eſſe finitum, vel infiniteſimum cujuſcunque ordinis; ac tandem angulum S M R factum a chorda S M, & tangente M R eſſe infiniteſimum primi ordinis.

Demonſt. prima pars. Tota peripheria circuli eſt menſura duorum rectorum ad peripheriam ipſam; cum igitur arcus N A M ſit menſura anguli N S M, ſeu duorum S M R, S R M, erit arcus N S M menſura anguli M S R; ſed arcus N S M vel eſt finitus, vel infi-

infiniteſimus primi ordinis; quia ad minimum ſemper remanet arcus M S infiniteſimus primi ordinis; ergo angulus M S R vel erit finitus, vel infiniteſimus primi ordinis. *Q. E. P.*

Demonſt. ſecunda pars. Ex arcu N M abſcindatur arcus N X aequalis M S, & conjungantur puncta X, S; erit angulus N S X aequalis angulo S M R; cum igitur arcus N M ſit menſura duorum angulorum S M R, S R M, & arcus N X ſit menſura anguli N S X, ſeu S M R; erit arcus X M menſura anguli N R M; ſed arcus X M poteſt eſſe finitus, & infiniteſimus cujuſcunque ordinis; ergo angulus N R M poteſt eſſe finitus, & infiniteſimus cujuſcunque ordinis. *Q. E. S.*

Pars tertia patet; cum arcus M S infiniteſimus primi ordinis ſit menſura anguli S M R.

COROLLARIUM.

Cum arcus X A M, N S M ſint menſura angulorum M R S, M S R; hinc

ſi ar-

ſi arcus X A M, & N S M ſint finiti, & aequales, erunt etiam anguli M R S, M S R aequales: ſi vero ſunt finiti, ſed differunt quantitate infiniteſima; & tunc anguli M S R, M R S ſunt pariter finiti, & differunt quantitate infiniteſima: vel tandem arcus ſunt finiti, ſed differunt quantitate finita; & tunc anguli M R S, M S R ſunt finiti, & eorum differentia erit finita, hoc eſt unus erit obtuſus. In prima ſuppoſitione S R intercepta inter circulum, & tangentem erit ſecundi ordinis, & differentia inter M S, M R erit abſolute nulla; in ſecunda ſuppoſitione intercepta S R erit ſecundi ordinis, & differentia inter M S, M R poteſt eſſe cujuſcunque ordinis incipiendo a tertio; in tertia tandem ſuppoſitione intercepta S R erit ſecundi ordinis, & differentia inter M S, M R erit ſimiliter ſecundi ordinis: quod totum patet ex ſcholio propoſitionis XII. Lib. primi. Si vero arcus X A M, vel N S M ſunt infiniteſimi primi ordinis, erit angulus M R S, vel M S R infiniteſimus primi ordinis; hinc S R, S M,

M R

M R in hac ſuppoſitione erunt infiniteſimae primi ordinis, & differentia inter M S, & M R erit ejuſdem ordinis (1). Si tandem arcus X A M ſit infiniteſimus ordinis ſuperioris, erit angulus R infiniteſimus ordinis ſuperioris; adeoque S R reſpectu S M poteſt eſſe infiniteſima cujuſcunque ordinis (2).

(1) *prop.* 13. *lib.* 1.

(2) *per prop.* 14. *lib.* 1.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 11.

SIt quadrans circuli A B C, ducanturque ordinatae P M, Q N productae uſquedum concurrant cum circulo in T, & S, quaeque intercipiant arcum M N infiniteſimum primi ordinis; tum per punctum M ducatur tangens M O, quae concurrat cum Q N producta in O. Si arcus A M, N C ſunt finiti, vel ſi arcus A M eſt infiniteſimus cujuſcunque ordinis ſuperioris, incipiendo a ſecundo (ducta ex M normali M R ad Q O); ratio Q O ad O R non differt a ratione Q N ad N R: ſi vero arcus N C ſit infiniteſimus cujuſcunque

 or-

ordinis, vel A M ſit primi, tunc ratio Q O ad O R differt a ratione Q N ad N R.

Demonſt. prima pars. Si arcus A M, N C ſunt finiti, erunt etiam finiti arcus T A M, S N M; hinc cum arcus T A M ſit menſura anguli S O M, & arcus S N M ſit menſura anguli M N O, erunt etiam finiti anguli M O N, M N O; igitur cum angulus N M O ſit infiniteſimus primi ordinis, erit intercepta N O infiniteſima ſecundi ordinis (1); ſed R N eſt infiniteſima primi ordinis (2); ergo Q N non differt a Q O, neque R N differt ab R O; & per conſequens ratio Q O ad R O non differt a ratione Q N ad N R (3). *Q. E. P.*

Demonſt. ſecunda pars. Quoniam arcus A M eſt infiniteſimus cujuſcunque ordinis ſuperioris, incipiendo a ſecundo, erit recta P M infiniteſima ejuſdem ordinis (4); ſed Q N eſt infiniteſima primi ordinis per ſuppoſitionem; ergo P M, ſeu Q R eſt infiniteſima reſpectu R N; adeoque ratio Q N ad N R non differt a ratione aequalitatis; & multo magis

gis

(1) *per doctrinam triangulorum lib.* 1.

(2) *per* 6. *prop.*

(3) *per prop.* 1. *lib.* 1.

(4) *per* 1. *prop.*

gis non differt a ratione aequalitatis ratio Q O ad O R; adeoque ratio Q O ad O R non differt a ratione Q N ad N R. *Q. E. S.*

Demonſt. tertia pars. Si arcus N C eſt infiniteſimus cujuſcunque ordinis, erunt arcus T A M, S N M finiti, ac proinde erunt etiam finiti anguli M O N, O N M; hinc N O erit infiniteſima ſecundi ordinis (1); ſed R N eſt pariter infiniteſima ſecundi ordinis (2); ergo ratio Q O ad O R differt a ratione Q N ad N R. *Q. E. T.*

(1) *per doctrinam triangulorum lib.* 1.

(2) *per coroll. prop.* 6.

Demonſt. quarta pars. Si tandem arcus A M eſt infiniteſimus primi ordinis, erit N O infiniteſima primi ordinis (3); ſed R N eſt infiniteſima primi ordinis (4). Ergo R N, N O ſunt infiniteſimae ejuſdem ordinis; & per conſequens ratio Q O ad O R differt a ratione Q N ad N R. *Q. E. Q.*

(3) *per coroll. prop.* 7.

(4) *per* 6. *prop.*

COROLLARIUM.

Si arcus N C ſit infiniteſimus cujuſcunque ordinis, erunt rectae R N, R O

(1) *per coroll. prop. 6., & 7.*

infiniteſimae ſecundi ordinis (1), & R M infiniteſima primi ordinis, tandem Q N, Q O erunt finitae. Ergo quarta proportionalis poſt N R, N Q, R M; vel poſt O R, O Q, R M erit infinita. Si arcus A M ſit infiniteſimus primi ordinis, erit R M ſecundi ordinis; Q N, N R, & R O, Q O ſunt infiniteſimae primi ordinis (2). Ergo quarta proportionalis poſt Q N, N R, R M, vel poſt Q O, O R, R M erit infiniteſima ſecundi ordinis.

(2) *per coroll. prop. 6.*

PROPOSITIO IX.

Fig. 11.

POſitis, quae ſupra poſuimus propoſitione praecedenti, dico triangulum M R N ſumi poſſe pro triangulo M R O ad determinandam ſubtangentem circuli.

Demonſt. Si arcus A M, & N C ſunt finiti, vel ſi arcus A M ſit infiniteſimus cujuſcunque ordinis ſuperioris, incipiendo a ſecundo, tunc ratio Q N ad N R non differt a ratione Q O ad O R (3); adeoque quarta proportionalis poſt R N, Q N,

(3) *per 8. prop.*

Q N, R M non differt a quarta proportionali poſt Q O, O R, R M, hoc eſt, non differt a ſubtangente. Si vero arcus N C ſit infiniteſimus cujuſcunque ordinis, vel A M ſit primi, cum quarta proportionalis in primo caſu ſit infinita, & in ſecundo caſu infiniteſima ſecundi ordinis, quodcunque ex illis duobus triangulis ſumatur; hinc patet &c. *Q. E. D.*

SCHOLION.

In ultima ſuppoſitione, licet quarta proportionalis inventa per triangulum N R M ſit infinita, aut infiniteſima, quemadmodum etiam ſubtangens, attamen in ſe multum diſcrepant; quod ſequenti exemplo demonſtro. Sit quadrans circuli V Q N M, in radio V Q ſumatur Q P infiniteſima primi ordinis, tum per punctum P ducatur P M parallela ad Q N, per punctum M ducatur tangens X M T, quae cum Q N producta concurrat in T, & cum Q V producta concurrat in X; deinde ducatur chorda N M, quae concurrat cum Q V producta. Fig. 12.

ɟta in S; tandem per punɟtum M ducatur M R parallela ad Q V. Eſt proprietas circuli notiſſima, quod angulus R M N aequalis ſit angulo N M T, ac proinde ratio T M ad R M eadem eſt, ac ratio T N ad N R; ſed ratio T M ad M R non differt a ratione aequalitatis (1). Ergo ratio T N ad N R non differt a ratione aequalitatis; ac proinde recta R N non differt a dimidio rectae R T. Praeterea in triangulo Q N S erit Q S ad R M, ut Q N ad N R; ac proinde rectangulum Q S in R N eſt aequale rectangulo Q N in R M: ſimiliter rectangulum Q X in R T eſt aequale rectangulo Q T in R M; ſed rectangulum Q N in R M non differt a rectangulo Q T in R M. Ergo etiam rectangulum Q S in R N non differt a rectangulo Q X in R T; & per conſequens ratio R N ad R T non differt a ratione Q X ad Q S; ſed R N non differt a dimidia parte rectae R T. Ergo etiam Q X non differt a dimidia parte rectae Q S; ſed Q X eſt vera ſubtangens. Ergo in hac ſuppoſitione, vera ſubtan-

(1) *per 8. prop.*

tan-

tangens, licet infinita, tamen eſt dimidia ſubtangentis ſuppoſitae Q S. Quod animadverſione dignum eſt.

PROPOSITIO X.

IN arcu F L infiniteſimo primi ordinis ſumatur arcus P Q infiniteſimus cujuſcunque ordinis ſuperioris, tum per L ducatur L X tangens circulum, & per puncta P, & Q ducantur normales P E, Q K ad diametrum B A C, quae ex chorda F L abſcindant partem M N, & productae in X, & Z abſcindant X Z ex tangente L X; oportet determinare differentiam chordae P Q a recta M N, tum differentiam ejuſdem chordae P Q a recta X Z. Fig. 13.

Conſt. Per punctum Q ducatur Q O parallela ad rectam F L, quae producta concurrat cum E P producta ſimiliter in O; per punctum vero X ducatur X R parallela ad rectam P Q, quae concurrat cum K Q producta in R; efformata jam erunt duo triangula P Q O, X Z R,

ex

ex quorum determinatione dependet ſolutio problematis: nam ex determinatione trianguli P Q O eruitur differentia inter rectas P Q, Q O, ſeu inter rectas P Q, M N; ex determinatione trianguli X R Z eruitur differentia inter rectas X Z, X R, ſeu inter rectas X Z, P Q. Determinationes autem triangulorum P Q O, X Z R dependent in primis ex ordine rectae P Q, ſeu X R, tum ex determinatione angulorum P Q O, Z X R, hoc eſt, ex angulo aberrationis rectae P Q a parallelismo cum recta F L, & ex angulo aberrationis ejuſdem rectae P Q a parallelismo cum tangente L X; tandem dependent ex determinatione angulorum O P Q, X R Z, ſeu anguli P Q Y, ſeu arcus P Y. *Q. E. F.*

COROLLARIUM.

Sit arcus P Q infiniteſimus ſecundi ordinis, erit ſimiliter chorda P Q infiniteſima ſecundi ordinis (1); arcus P F ſit abſolute nullus, & in hac ſuppoſitione punctum P coincidit cum puncto F, ac

(1) *per* 1. *prop.*

ac proinde ob paralleliſmum rectarum Q O, F L efformatur angulus L F Q aequalis angulo P Q O; ſed angulus L F Q eſt infiniteſimus primi ordinis, quia inſiſtit arcui Q L infiniteſimo primi ordinis. Ergo etiam angulus P Q O erit infiniteſimus primi ordinis. In hiſce determinationibus, vel arcus P Y erit infiniteſimus ſecundi ordinis. (nam ad minimum ſemper remanet arcus P Q infiniteſimus ſecundi ordinis, ac proinde evaneſcente arcu P B remanet B Y infiniteſimus ſecundi ordinis); vel arcus P Y eſt infiniteſimus primi ordinis, vel eſt finitus, ſed minor ſemicirculo quantitate finita, vel minor ſemicirculo quantitate infiniteſima, vel aequalis perfecte ſemicirculo, vel major quantitate infiniteſima, vel major quantitate finita, vel diſcrepans a circulo quantitate infiniteſima primi ordinis, vel quantitate infiniteſima ſecundi ordinis; & tunc angulus P Q Y, ſeu O P Q, vel erit infiniteſimus ſecundi ordinis, vel erit infiniteſimus primi ordinis, vel erit finitus, & acutus, vel finitus, & rectus,

vel finitus, & obtuſus diſcrepans a recto quantitate infiniteſima, vel obtuſus diſcrepans a recto quantitate finita, vel obtuſus diſcrepans a duobus rectis quantate infiniteſima primi ordinis, vel obtuſus minor duobus rectis quantitate infiniteſima ſecundi ordinis; in omnibus hiſce caſibus facile eſt determinare per doctrinam triangulorum expoſitam in primo libro differentiam inter P Q, & O Q, ſeu M N. Eadem eſt methodus, ſi arcus F P ſit infiniteſimus cujuſcunque ordinis, quemadmodum etiam arcus P Q ſit infiniteſimus cujuſcunque ordinis. Quidquid dictum eſt de hoc triangulo P Q O, idem dicito de triangulo X Z R, quod inſervit ad determinandam differentiam inter rectas X Z, X R, ſeu P Q.

PROPOSITIO XI.

Fig. 14. SIt C D arcus circuli infiniteſimus primi ordinis, in quo ſumatur arcus N M infiniteſimus cujuſcunque ordinis

ſupe-

ſuperioris; per punctum D ducatur D B tangens circulum, tum ex centro A per puncta M, & N ducantur rectae A N B, A M Z, quae ex chorda C D abſcindant partem P Q, ex tangente vero D B abſcindant partem B Z. Oportet determinare differentiam inter chordam M N, & rectam P Q, tum differentiam inter eandem chordam M N, & rectam B Z.

Conſt. Ex punctis Z, & P ducantur Z X, P O parallelae ad chordam M N; efformata jam erunt duo triangula P Q O, X Z B; ex determinatione primi trianguli eruitur differentia inter P Q, & P O, ex determinatione ſecundi trianguli eruitur differentia inter rectas B Z, & Z X: differentia vero inter rectas P O, & M N, inter M N, & Z X facile erui poteſt ex interceptis M P, & M Z; cum P O, M N, Z X ſint parallelae. *Q. E. F.*

COROLLARIUM.

Facile dignoſci poteſt differentiam inter rectas M N, P Q, & inter rectas M N, B Z eſſe ſemper infiniteſimam reſpective ad ipſas; nam P Q non poteſt differre a P O niſi per quantitatem infiniteſimam ~~reſpectivam~~, cum angulus Q P O ſit ſemper infiniteſimus, & anguli P O Q, O Q P ſint ſemper finiti; ſimiliter P O non poteſt differre ab M N niſi quantitate infiniteſima reſpective, nam intercepta P M ſemper eſſe debet infiniteſima. Idem dicito de rectis M N, X Z, & B Z.

PROPOSITIO XII.

Fig. 15. SIt E B arcus circuli infiniteſimus primi ordinis, E B ſit ejus chorda, E N ſinus rectus; dico ſegmentum ſphaericum E B F genitum ab arcu E B, dum ſemicirculus D E B rotatur circa diametrum D B, non differre a cono ſexquialtero coni E B F geniti in eadem

rota-

rotatione a triangulo rectangulo E N B, niſi quantitate infiniteſima ſexti ordinis.

Demonſt. Segmentum ſphaericum E B F aequatur cono, cujus baſis eſt circulus radii N E, altitudo vero eſt N O compoſita ex intercepta N B, & B O quarta proportionali poſt rectas N D, C D, N B, per theoremata Archimedis; ſed C D non differt a dimidia N D, niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis, nam D B non differt a D N, niſi quantitate N B infiniteſima ſecundi ordinis. Ergo pariter dimidia D B, ſeu D C non differt a dimidia N D, niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis; adeoque B O non differt a dimidia N B niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis reſpective, ac proinde N O non differt a parte ſexquialtera rectae N B, niſi quantitate finiteſima ſecundi ordinis reſpective; ſed coni E B F, E O F, qui habent pro baſi eundem circulum radii N E, ſunt ut altitudines N B, N O; ergo etiam conus E O F non differt a parte ſexquialtera coni E B F niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis

reſpecti-

reſpective; ſed coni E O F, E B F ſunt infiniteſimi quarti ordinis (1); nam baſes, & altitudines horum conorum ſunt infiniteſimae ſecundi ordinis; ergo differentia coni E O F a parte ſesquialtera coni E B F eſt infiniteſima ſexti ordinis. *Q. E. D.*

(1) *per prop.* 3. *lib.* 1.

COROLLARIUM.

Hinc ratio ſegmenti ſphaerici E B F ad conum, cujus baſis eſt circulus radii E N, altitudo vero intercepta N B, non differt a ratione, quae intercedit inter tria, & duo.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 16. SIt A B arcus circuli infiniteſimus primi ordinis, A C ſit ſinus rectus, A B ſit chorda, F B ſit ſinus totus, M B ſit tangens, F A M ſit ſecans ejuſdem arcus; tum ſemicirculus B A L concipiatur rotari circa diametrum B F L; dico circulum genitum a tangente M B, ſeg-

ſegmentum ſuperficiei ſphaericae genitum ab arcu A B, & circulum genitum a ſinu recto A C differre inter ſe quantitate infiniteſima quarti ordinis; dico ſecundo conum genitum a triangulo rectangulo M B F, ſectorem ſphaericum A F D B, & conum genitum a triangulo rectangulo A F C differre inter ſe quantitate infiniteſima quarti ordinis.

Demonſt. prima pars. Circulus, cujus radius eſt tangens M B, ſegmentum ſuperficiei ſphaericae A B D, ſeu circulus, cujus radius eſt chorda A B per theoremata Archimedis, & circulus, cujus radius eſt ſinus rectus A C ſunt, ut quadrata tangentis M B, chordae A B, & ſinus recti A C; ſed tangens M B, chorda A B, ſinus rectus A C differunt quantitate infiniteſima tertii ordinis (1), hoc eſt, ſecundi ordinis reſpective ad ipſas, cum ſint infiniteſimae primi ordinis (2). Ergo etiam quadrata M B, A B, A C differunt quantitate infiniteſima ſecundi ordinis reſpective (3), ac proinde etiam circuli, quorum radii ſunt tangens M B, chorda A B, &

(1) *per prop.* 3.

(2) *per* 1. *prop.*

(3) *per prop.* 20. *lib.* 1.

ſinus rectus A C, differunt quantitate infiniteſima ſecundi ordinis reſpective (1); ſed iſti circuli ex eo quia habent radium infiniteſimum primi ordinis ſunt infiniteſimi ſecundi ordinis. Ergo eorum differentia erit quarti ordinis. *Q. E. P.*

(1) *corol.* 1. *prop.* 20. *lib.* I.

Demonſt. ſecunda pars. Conus genitus a triangulo rectangulo M F B eſt ad ſectorem ſphaericum F A B D, ut circulus, cujus radius eſt tangens B M, eſt ad circulum, cujus radius eſt chorda B A; ſed iſti circuli differunt quantitate infiniteſima quarti ordinis (2), hoc eſt, ſecundi ordinis reſpective; ergo etiam conus M F N, & ſector ſphaericus A F D differunt quantitate infiniteſima ſecundi ordinis reſpective; ſed conus M F N, & ſector ſphaericus A F D ſunt infiniteſimi ſecundi ordinis. Ergo eorum differentia erit quarti ordinis. Quod differentia inter ſectorem ſphaericum A B D F, & conum genitum a triangulo rectangulo A C F ſit infiniteſima quarti ordinis patet ex praecedenti propoſitione. *Q. E. S.*

(2) *per* 1. *part. hujus.*

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Poſitis, quae ſupra poſuimus propoſitione praecedenti, dico differentiam circuli, cujus radius eſt ſinus rectus M B, a circulo, cujus radius eſt chorda M A, non differre a quarta parte differentiae ejuſdem circuli ſinus recti M B a circulo, cujus radius eſt tangens O A. Fig. 17.

Demonſt. Ex puncto M ducatur M S parallela ad C A; erit S O differentia ſinus recti M B a tangente A O; tum centro A, intervallo chorda A M abſcindatur ex tangente A O pars A X aequalis chordae A M; erit S X differentia ſinus recti M B a chorda M A. Circulus, cujus radius eſt chorda M A, ſeu A X, eſt ad circulum, cujus radius eſt ſinus rectus M B, ut quadratum X A eſt ad quadratum M B; ergo dividendo, differentia circuli radii X A a circulo ſinus recti M B eſt ad eundem circulum ſinus recti M B, ut biſrectangulum X S in S A cum quadrato X S eſt ad quadratum M B: ſimiliter circulus ſinus

recti M B eſt ad circulum tangentis O A, ut quadratum M B ad quadratum O A; ac proinde circulus ſinus recti M B eſt ad differentiam ejuſdem circuli M B a circulo tangentis O A, ut quadratum M B eſt ad biſrectangulum A S in S O cum quadrato S O. Ergo ex aequo differentia circuli ſinus recti M B a circulo chordae A M eſt ad differentiam circuli ejuſdem ſinus recti M B a circulo tangentis O A, ut biſrectangulum A S in S X cum quadrato S X eſt ad biſrectangulum A S in S O cum quadrato S O, ſeu ut rectangulum A S in S X eſt ad rectangulum A S in S O; nam X S, & S O ſunt infiniteſimae reſpectu S A (1). Ergo praedictae differentiae ſunt ut X S, & S O; ſed X S non differt a quarta parte rectae S O (2). Ergo differentia circuli ſinus recti M B a circulo chordae M A eſt ad differentiam ejuſdem circuli ſinus recti M B a circulo tangentis O A, ut unum ad quatuor, ſpretis tamen quantitatibus infiniteſimis reſpectivis. *Q. E. D.*

(1) *per* 3. *prop.*

(2) *per* 5. *prop.*

CO-

COROLLARIUM.

Differentia igitur circuli ſinus recti M B a circulo chordae M A, ſeu a ſuperficie ſegmenti ſphaerici M A N non differt a tertia parte differentiae ſegmenti ſuperficiei ſphaericae M A N a circulo tangentis O A.

PROPOSITIO XV.

Iſdem poſitis, differentia ſuperficiei ſphaericae M A N a circulo ſinus recti M B non differt a duplo differentiae ejuſdem circuli ſinus recti M B a ſuperficie coni geniti a triangulo rectangulo M B A, excluſa baſi. Fig. 18.

Demonſt. Centro M, intervallo ſinu recto M B abſcindatur a chorda M A pars M T aequalis M B; tum inter A M, T M inveniatur media proportionalis M I. Superficies ſegmenti ſphaerici aequatur circulo, cujus radius eſt chorda M A; ſuperficies coni M A N, excluſa baſi, aequatur circulo, cujus radius eſt

L 2 M I

M I media proportionalis inter chordam M A, & ſinum rectum M B, per theoremata Archimedis. Ergo ſuperficies ſegmenti ſphaerici M A N eſt ad circulum ſinus recti M B, ut quadratum M A eſt ad quadratum M B; ac proinde dividendo, differentia ſuperficiei ſphaericae M A N a circulo M B eſt ad circulum M B, ut biſrectangulum M T in T A cum quadrato T A eſt ad quadratum M B. Similiter circulus M B eſt ad ſuperficiem coni M A N, excluſa baſi, ut quadratum M B eſt ad quadratum M I; ac proinde circulus M B eſt ad differentiam ejuſdem circuli M B a circulo M I, ut quadratum M B eſt ad biſrectangulum M T in T I cum quadrato T I; adeoque ex aequo praedictae differentiae ſunt, ut rectangula M T A, M T I, ſeu, ut T A, T I; ſed T A non differt a dupla T I (1). Ergo differentia ſuperficiei ſphaericae M A N a circulo ſinus recti M B non differt a duplo differentiae ſuperficiei coni M A N, excluſa baſi, ab eodem circulo ſinus recti M B. *Q. E. D.*

(1) *per coroll.* 1. *prop.* 2. *lib.* 1.

COROL-

COROLLARIUM.

Si igitur differentia circuli ſinus recti M B a ſuperficie coni M A N, excluſa baſi, ſit *unum*, erit differentia ejuſdem circuli M B a ſuperficie ſphaerica M A N *duo*, differentia ſuperficiei ſphericae M A N a circulo tangentis erit *ſex* (1), tandem differentia circuli ſinus recti M B a circulo tangentis erit *octo* (2).

(1) *per coroll. prop.* 14.

(2) *per* 14 *prop.*

PROPOSITIO XVI.

Fig. 19.

Iiſdem poſitis, differentia coni O C P, geniti a triangulo rectangulo C A O, a ſectore ſphaerico M C N non differt a differentia ejuſdem ſectoris ſphaerici M C N a cono M C N, genito a triangulo rectangulo M C B.

Demonſt. Sector ſphaericus M C N aequatur cono, cujus altitudo eſt radius C A, baſis vero eſt circulus chordae M A. Cum igitur conus O C P, ſector ſphaericus M C N, ſeu conus altitudinis C A, baſis circuli M A, & ſoli-

dum

dum conflatum ex duobus conis M C N, M A N habeant eandem altitudinem C A, ſunt, ut circuli tangentis O A, chordae M A, & ſinus recti M B; ac proinde differentiae illorum conorum ſunt, ut differentiae iſtorum circulorum; ſed differentia circuli tangentis O A a circulo chordae M A non differt a triplo differentiae circuli chordae M A a circulo ſinus recti M B (1). Ergo differentia coni O C P a ſectore ſphaerico M C N non differt a triplo differentiae ejuſdem ſectoris ſphaerici M C N a ſolido conflato a duobus conis M C N, M A N; ſed hoc ſolidum differt a cono M C N per conum M A N, & ſector ſphaericus M C N differt a cono M C N per ſegmentum ſphaericum M A N; hinc cum ſegmentum ſphaericum M A N ſit ad conum M A N, ut tria ad duo (2), erit differentia ſectoris ſphaerici M C N a cono M C N ad differentiam ejuſdem ſectoris ſphaerici M C N a ſolido conflato a duobus conis M C N, M A N, ut tria ad unum, ſpretis infiniteſimis. Ergo differentia coni

(1) *per coroll. prop.* 14.

(2) *per coroll. prop.* 12.

ni

ni O C P a ſectore ſphaerico M C N, & differentia ejuſdem ſectoris ſphaerici M C N a cono M C N habent ad eandem quantitatem eandem rationem, ſpretis infiniteſimis; adeoque earum ratio non differt a ratione aequalitatis. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Si conus M A N ſit *duo*, erit ſegmentum ſphaericum M A N *tria* (1), & per hanc propoſitionem conus truncatus O M N P, ſeu differentia conorum M C N, O C P erit *ſex*; hoc eſt, conus M A N, ſegmentum ſphaericum M A N, & conus truncatus O M N P erunt in proportione harmonica.

(1) *per coroll. prop.* 12.

ELEMEN-

ELEMENTA
GEOMETRIAE
INFINITESIMORUM
LIBER TERTIUS.

PROPOSITIO I.

IN curva quacunque A B C D E, ſumptis arcubus A B, B C, C D, D E infiniteſimis cujuſcunque ordinis, ductiſque ſubtenſis A B, B C, C D, D E; dico angulos A B C, B C D, C D E factos a ſingulis binis ſubtenſis infiniteſimam habere differentiam a ſumma duorum rectorum, exceptis nonnullis punctis numero finitis. Fig. 1.

Demonſt. Ducatur chorda A E, quae ſubtendat arcum A B C D E finitum, diſtinctum in arcus A B, B C, C D, D E infiniteſimos, qui certe erunt numero infiniti; ac proinde cum ſubtenſa A E terminabunt polygonum infinitorum laterum, cujus anguli externi omnes erunt numero infiniti; ſed anguli externi cujuſcunque polygoni ſimul ſumpti aequant quatuor rectos. Ergo ſumma horum infinitorum angulorum non poteſt eſſe major quatuor rectis, quod falſum

ſum eſſet, ſi anguli A B C, B C D &c. in punctis numero infinitis reſpective differrent a duobus rectis quantitate finita; nam infiniti anguli finiti dant ſummam angulorum infinitam. Ergo patet propoſitio.

COROLLARIUM.

Ex hac propoſitione patet ſemper ſtare conceptum curvae, dummodo anguli A B C, B C D &c. differant a duobus rectis quantitate infiniteſima, etiam cujuſcunque ordinis; neque requiritur, ut iſtae differentiae ſint aequales, vel ſaltem differant quantitate infiniteſima reſpective; ſed poſſunt eſſe inaequales, quinimmo & infiniteſimae diverſorum ordinum; etenim in hiſce caſibus nunquam deſtruitur conceptus polygoni infinitorum laterum, ac proinde conceptus curvae.

PROPOSITIO II.

SI per puncta B, & C arcus B C infiniteſimi cujuſcunque ordinis ducantur tangentes M B N, O C R; dico angulos S B C, S C B factos a tangentibus cum chorda B C eſſe infiniteſimos. Fig. 2.

Demonſt. Sumantur arcus A B, C D infiniteſimi, ducanturque ſubtenſae A B, C D productae verſus F; & chorda B C hinc inde producatur utcunque in E, & P. Per ſuppoſitionem ſubtenſae A B, B C erunt infra tangentem M B N; ergo partes B F, B E erunt ſupra ipſam tangentem; adeoque tangens M B N cadit intra angulos E B A, F B C; ſed iſti anguli ſunt infiniteſimi (1); ergo multo magis anguli M B A, C B N ſunt infiniteſimi: idem demonſtratur de angulo B C S. Ergo patet, &c. *Q. E. D.*

(1) *per* 1. *prop.*

COROLLARIUM.

Cum haec propoſitio dependeat ex antecedenti, hinc non verificatur in pun-

punctis, in quibus non verificatur illa.

SCHOLION.

Quando demonſtrantur proprietates curvarum per angulos infiniteſimos tangentium, & chordarum infiniteſimarum, ſemper excluduntur puncta, in quibus praedictae propoſitiones non verificantur; ſicuti etiam excluduntur puncta regreſſus, & flexus contrarii, niſi oppoſitum moneatur; quibus punctis quid eveniat curvae ſuo loco determinabimus.

PROPOSITIO III.

Fig. 3. IN curva quacunque arcus B C infiniteſimus non differt a corda B C, niſi infiniteſima quantitate ordinis ſuperioris.

Demonſt. Per puncta B, & C ducantur tangentes B L, C L concurrentes in L, ex puncto L ducatur normalis L Q ad chordam B C. Quoniam anguli

li L B Q, L C Q ſunt infiniteſimi (1), erit normalis L Q infiniteſima reſpectu ad latera B L, B Q, & C L, C Q (2); ſed differentia laterum B L, B Q, & C L, C Q eſt infiniteſima reſpectu ad L Q; ergo B L $\dashv\vdash$ L C, ac proinde arcus B C non differt a chorda B C niſi infiniteſima quantitate ordinis ſuperioris. *Q. E. D.*

(1) *per* 2. *prop.*

(2) *per* 9. *prop. lib.* 1.

PROPOSITIO IV.

Fig. 4.

Recta A F ſubtendat arcum A B C D E F cujuſcunque curvae; ex punctis A, & F ducantur tangentes A M, F N; dico ſummam angulorum M A F, A F N aequalem eſſe omnibus angulis factis ab omnibus tangentibus cum laterculis evaneſcentibus arcus A B C D E F.

Demonſt. Arcus A C F dividatur in arcus infiniteſimos A B, B C, C D, D E, E F; arcubus ducantur ſubtenſae A B, B C, &c.; iſtae cum chorda A F terminabunt polygonum infinitorum late-

te-

terum, cujus anguli externi S A B, O B C, A F R &c. ſunt aequales quatuor rectis; ſed anguli S A B, R F A cum angulis B A F, A F E ſunt aequales quatuor rectis; ergo, ablatis communiter angulis S A B, R F A, erunt omnes anguli infiniteſimi O B C &c. aequales angulis B A F, A F E; ſed anguli B A F, A F E, evaneſcentibus arcubus A B, B C &c., tandem coincidunt cum angulis tangentium M A F, A F N; & anguli infiniteſimi C B O &c. tandem coincidunt cum angulis factis a tangentibus cum laterculis evaneſcentibus curvae; ergo etiam anguli M A F, A F N ſunt aequales omnibus angulis factis ab omnibus tangentibus cum laterculis evaneſcentibus arcus A C F. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc ſi anguli O B C &c. ſunt infiniteſimi primi ordinis, & latera A B, B C ſint quoque infiniteſima primi reſpectu A F, erit ſumma angulorum M A F,

A F N

A F N finita, cum reſultet ex infinitis angulis O B C infiniteſimis primi ordinis; ſi vero anguli O B C ſunt infiniteſimi ſecundi ordinis, erit ſumma angulorum M A F, A F N infiniteſima primi. Idem dicito ſi anguli O B C ſint infiniteſimi ordinis ſuperioris.

SCHOLION.

Si anguli O B C &c. non eſſent jugiter ejuſdem ordinis, ſed continue ordinum ſuperiorum, tunc ſumma angulorum M A F, A F N eſſet ejuſdem ordinis, ac eſt angulus O B C ordinis inferioris.

PROPOSITIO V.

IN curva B O X C, ſumptis arcubus O D, D E, E F, F B &c. infiniteſimis alicujus ordinis, ſed reſpective ejuſdem, anguli externi O D A, D E M &c., facti a chordis D E, E F &c. productis, ſint infiniteſimi ejuſdem ordinis Fig. 5.

reſpective; ſi ſumantur arcus B O, O X, X C alterius ordinis inferioris, ſed reſpective ejuſdem; dico angulos externos S O X, T X C &c., factos a chordis B O, O X &c. productis, eſſe ejuſdem ordinis reſpective.

Demonſt. Ducantur rectae O D, O E, O F, &c., & per punctum O ducatur tangens Z O Y. Quoniam arcus O D, D E ſunt infiniteſimi ejuſdem ordinis per ſuppoſitionem, erunt rectae O D, D E infiniteſimae ejuſdem ordinis (1); ac proinde in triangulo obtuſangulo O D E anguli D O E, D E O ſunt infiniteſimi ejuſdem ordinis, ac eſt angulus A D O; ac proinde ejuſdem ordinis, ac eſt angulus M E D, vel ejuſdem ordinis, ac eſt angulus M E O. Similiter quoniam arcus O D, D E ſunt infiniteſimi ejuſdem ordinis, ac eſt arcus E F, erit arcus O E infiniteſimus ejuſdem ordinis, ac eſt arcus E F; hinc ſubtenſae O E, E F ſunt infiniteſimae ejuſdem ordinis (2). Ergo in triangulo obtuſangulo O E F angulus F O E eſt infiniteſimus ejuſdem ordinis, ac eſt angulus

(1) *per 3. prop.*

(2) *per 3. prop.*

lus

lus M E O, ſeu infiniteſimus ejuſdem ordinis, ac eſt angulus D O E. Idipſum demonſtratur de aliis angulis B O F in infinitum, uſquedum arcus O B, ſeu chorda O B ſit alterius ordinis inferioris. Ergo angulus D O B, ac proinde angulus B O Y, ſeu S O Z componitur ex infinitis angulis ejuſdem ordinis, ac eſt angulus D O B; eodem modo demonſtratur angulum Z O X componi ex infinitis angulis ejuſdem ordinis, ac eſt angulus D O E. Ergo integer angulus S O X componitur ex infinitis angulis ejuſdem ordinis anguli D O E. Idem demonſtratur de angulo T X C &c. Ergo anguli S O X, T X C &c. ſunt ejuſdem ordinis reſpective, cum ſint eadem ratione infiniti reſpectu ad angulum D O E. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Ex demonſtratione propoſitionis colligitur angulos D O Y, B O Y factos a tangente O Y cum chordis O D, O B diverſorum ordinum, eſſe & ipſos ordi-

num diverſorum, & quidem angulum chordae ordinis ſuperioris eſſe & ipſum ordinis ſuperioris reſpectu ad angulum chordae ordinis inferioris.

COROLLARIUM II.

Colligitur etiam angulos B O Y, Y O R, ſeu Z O X, factos a chordis B O, X O ejuſdem ordinis cum tangente Z O Y, eſſe ejuſdem ordinis.

COROLLARIUM III.

Ex puncto B ducta tangente B N erunt anguli Y O B, O B N ejuſdem ordinis; nam ſicuti demonſtratum eſt angulum Y O B componi ex infinitis angulis ejuſdem ordinis, ac eſt angulus D O E, ita demonſtrari poteſt etiam angulum O B N componi ex infinitis angulis ejuſdem ordinis, ac eſt angulus D O E.

COROLLARIUM IV.

Si anguli A D O, M E D &c. ſint infiniteſimi ejuſdem ordinis, ac ſunt arcus O D, D E, E F &c. quando anguli Y O B, O B N ſunt finiti, erit chorda O B pariter finita; ſi vero anguli A D O, M E D &c. ſint infiniteſimi ordinis inferioris reſpectu ad ordinem arcuum O D, D E &c. quando anguli Y O B, O B N ſunt finiti, chorda O B eſt infiniteſima; ac proinde curva deberet in ſe redire antequam chorda O B eſſet finita. Si tandem anguli A D O, M E D &c. ſint infiniteſimi ordinis ſuperioris reſpectu ad ordinem arcuum O D, D E &c. quando anguli A D O, M E D &c. ſunt finiti, chorda O B eſſet infinita; hinc curva non poſſet in ſe redire priuſquam chorda O B eſſet infinita.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Fig. 6. IN curva praecedentis propoſitionis, maxima altitudo M R arcus A R F reſpectu ad chordam A F eſt ejuſdem ordinis, ac ſunt anguli X A F, A F Z, facti a tangentibus X A, Z F cum chorda A F.

Demonſt. Maxima altitudo R M arcus A R M eſt ubi tangens X R Z eſt parallela chordae A F, alioquin arcus A R M non eſſet totus infra tangentem; hinc anguli M A R, M F R (ductis A R, R F) ſunt aequales angulis X R A, F R Z; adeoque ſunt ejuſdem ordinis, ac ſunt anguli X A R, R F Z (1), ſeu ejuſdem ordinis ac ſunt anguli X A F, A F Z; ſed R M reſpectu A M, & M F eſt infiniteſima ejuſdem ordinis, ac ſunt anguli R A M, R F M (2), ſeu ejuſdem ordinis, ac ſunt anguli X A F, A F Z; hinc, cum anguli X A F, A F Z ſint ejuſdem ordinis, erit M R reſpectu ad totam A F ejuſdem ordinis, ac ſunt anguli X A F, A F Z. *Q. E. D.*

(1) *per coroll.* 3. *prop.* 5.

(2) *per* 9. *prop. lib.* I.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Rectae A B, B C ad quemcunque angulum finitum A B C poſitae ſint diametri coordinatarum; ducanturque ordinatae Q N, P M intercipientes arcum M N infiniteſimum primi ordinis, cujus chorda ſit M N, & ducatur N R parallela ad A B; dico latera trianguli M R N eſſe infiniteſima primi ordinis, excepto, quando chorda M N producta faciens angulum infiniteſimum accedit ad paralleliſmum cum diametris coordinatarum. Fig. 7. & 8.

Demonſt. Chorda M N producatur uſquedum concurrat cum diametris coordinatarum in punctis X, & Z; cum haec non faciat angulos infiniteſimos cum diametris X B, B Z, erunt anguli B X Z, X Z B finiti; adeoque in triangulo X B Z, & ob paralleliſmum rectarum N R, X B, & R M, B Z in triangulo etiam R M N, anguli omnes ſunt finiti; ac proinde latera N M, M R, N R ſunt ejuſdem ordinis; ſed N M ex hypotheſi eſt infiniteſima primi ordinis, quia arcus N M eſt infiniteſimus pri-

primi ordinis. Ergo N R, R M ſunt infiniteſimae primi ordinis. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Si arcus N M interceptus ab ordinatis Q N, P M ſit infiniteſimus ordinis ſuperioris, erit etiam N R, & M R infiniteſima ejuſdem ordinis ſuperioris.

COROLLARIUM II.

Si per punctum N ducatur tangens N S, efformatum erit triangulum M N S, in quo anguli N S M, N M S ſunt finiti per ſuppoſitionem; angulus vero S N M eſt infiniteſimus per naturam curvae; ergo S M eſt infiniteſima reſpectu N M, ac proinde reſpectu R M; hinc M S reſpectu R M erit ſpernenda.

SCHOLION.

In punctis, in quibus M N eſt parallela diametris coordinatarum, obſervanda ve-

veniunt, quae diximus in ſcholio propoſitionis IX. libri ſecundi.

PROPOSITIO VIII.

IN diametro A B curvae A M N C ſumantur P Q, Q B quantitates infiniteſimae primi ordinis, quae non differant, niſi quantitate infiniteſima reſpective; ex punctis P, Q, B ducantur ordinatae P M, Q N, B C ad angulum finitum cum diametro A B, tum chordae M N, N C, tandem ex punctis M, & N ducantur M R, N X parallelae ad A B; oportet determinare differentiam, quae intercedit inter latera homologa triangulorum M R N, N X C. Fig. 9. & 10.

Con. Chorda M N producatur uſquedum concurrat cum ordinata B C producta, ſi opus eſt, in S. Quoniam triangula M R N, N S X ſunt aequiangula, ac proinde ſimilia ob paralleliſmum rectarum R N, X S, & M R, N X; hinc, ſi duo latera homologa M R, N X, vel R N, X S, vel N M, N S

ſupponantur conſtantia, ſeu aequalia, omnia latera trianguli N M R ſunt aequalia lateribus correſpondentibus trianguli S N X; ſi vero duo latera homologa differant quantitate infiniteſima alicujus ordinis, etiam reliqua latera homologa triangulorum M N R, N S X differunt quantitate infiniteſima ejuſdem ordinis; ſed latera trianguli N C X non differunt a lateribus trianguli N S X, niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis, poſito angulo C N S infiniteſimo primi ordinis (1). Ergo latera trianguli M N R non differunt a lateribus trianguli N C X, niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis. *Q. E. I.*

(1) *per prop.* 9. 10. 11. *lib.* I.

COROLLARIUM I.

Poſito angulo C N S infiniteſimo ordinis ſuperioris, etiam differentia inter latera trianguli N C X, & N S X erit & ipſa infiniteſima ordinis ſuperioris; hinc, ſi latera trianguli M R N, & N X S ſunt relative aequalia, erit differentia inter latera triangulorum M R N, N C X

eadem,

eadem, ac illa, quae intercedit inter latera triangulorum N S X, N C X; ſi vero latera triangulorum M R N, N X S differunt quantitate infiniteſima alicujus ordinis, tunc differentia, quae intercedit inter latera triangulorum M R N, N X C dependet ex combinatione harum quantitatum infiniteſimarum cum quantitatibus infiniteſimis, quibus differunt latera triangulorum N S X, N C X.

COROLLARIUM II.

Patet etiam via, qua determinari poſſunt differentiae inter latera homologa triangulorum M N R, N C X, etiamſi latera horum triangulorum ſint infiniteſima cujuſcunque ordinis, & differentia, quae intercedit inter latera homologa triangulorum M R N, N X S ſit ſimiliter infiniteſima cujuſcunque ordinis reſpective ad ipſa latera, & angulus C N S ſit pariter infiniteſimus cujuſcunque ordinis.

SCHOLION.

In qualibet curva licitum eſt accipere fluxionem, aut abſciſſarum, aut ordinatarum aut curvae, aut aliam tanquam conſtantem pro determinandis quantitatibus infiniteſimis ordinum ſuperiorum relative ad conſtantes; ſed ſtatim ac una tanquam conſtans ſumpta eſt, liberum amplius non eſt aliam accipere, alioquin determinaretur curva.

PROPOSITIO IX.

Fig. 11. & 12. Ex puncto A ad quamcunque curvam P Q B ducantur rectae A Q, A B intercipientes arcum Q B infiniteſimum primi ordinis, cui ſubtendatur Q B, & ex puncto Q in A B demittatur normalis Q R; dico tria latera trianguli Q R B eſſe infiniteſima primi ordinis, exceptis illis punctis, in quibus Q B vel eſt normalis ad A B, vel in directum cum A Q, vel ſaltem a vera normali, & a vera directione cum A Q differt quantitate infiniteſima. De-

Demonſt. patet; nam per ſuppoſitionem angulus R B Q neque eſt rectus, neque infiniteſimus; igitur cum angulus B R Q ſit rectus, in triangulo R B Q tres anguli ſunt finiti, ac proinde tria latera infiniteſima primi ordinis, cum B Q ſit infiniteſimum primi ordinis per ſuppoſitionem. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Si arcus Q B ſit infiniteſimus ordinis ſuperioris, erunt etiam latera Q R, R B infiniteſima ejuſdem ordinis ſuperioris.

COROLLARIUM II.

Si ex puncto Q ducatur tangens Q S, quae concurrat cum R B producta, ſi opus eſt, in S, cum anguli Q B S, Q S B ſint finiti per ſuppoſitionem, & angulus B Q S ſit infiniteſimus per naturam curvae, erit B S intercepta inter tangentem, & curvam infiniteſima reſpectu B Q, ac proinde reſpectu R B; adeoque B S reſpectu R B erit ſpernenda.

SCHO-

SCHOLION.

Quod dictum eſt aliquam alterationem patitur, ubi chorda B Q vel eſt normalis ad A B, vel in directum cum A Q; & generaliter loquendo, quando anguli fluentes vel evadunt recti, vel aequales duobus rectis, vel ſaltem differentia horum angulorum aut a recto, aut a duobus rectis tranſit ex uno ordine ad alium, tunc nonnulli anguli fluentes, ac proinde nonnullae rectae fluentes, tranſeunt ex uno ordine ad alium; & ſic tota congeries quantitatum fluentium alterationem patitur, quae tamen non erit difficile determinatu ab illis, qui noſtris elementis inſtructi ſunt.

PROPOSITIO X.

Fig. 13, & 14. EX puncto A ad quamcunque curvam ducantur tres rectae A P, A Q, A B, intercipientes arcus B Q, Q P infiniteſimos primi ordinis, qui non differant, niſi quantitate infiniteſima reſpecti-

ctive, tum ex punctis P, Q ducantur normales P M, Q R ad rectas A Q, A B; oportet determinare differentiam, quae intercedit inter latera homologa triangulorum P M Q, Q R B.

Con. Rectae A P, A Q, A B ſint finitae, & chordae B Q, Q P non jaceant in directum cum rectis A B, A Q, A P; chorda P Q producatur uſquedum concurrat cum A B producta, ſi opus eſt, in S. Cum arcus P Q, Q B ſint infiniteſimi primi ordinis, erunt etiam chordae P Q, Q B infiniteſimae primi ordinis (1); ac proinde in triangulis P A Q, Q A B, cum anguli A P Q, A Q P, & A Q B, A B Q ſint finiti, & latera P Q, Q B ſint infiniteſima primi ordinis, erunt anguli P A Q, Q A B infiniteſimi primi ordinis (2); hinc in triangulo M Q P angulus M Q P auctus eſt quantitate infiniteſima primi ordinis reſpectu ad angulum R S Q trianguli R Q S; ergo, poſito latere uno homologo conſtante, erit differentia reliquorum laterum infiniteſima primi ordinis reſpective (3), hoc eſt, ſecundi ordinis;

(1) *per 3. prop.*

(2) *per prop. 9. 10. 11. lib. 1.*

(3) *per prop. 17. lib. 1.*

dinis; ſed latera trianguli R Q B non differunt a lateribus trianguli R Q S, niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis (1). Ergo latera trianguli M P Q non differunt a lateribus homologis trianguli R Q B, niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis.

(1) *per prop.* 11. *lib.* 1.

Si vero nullum latus ſit conſtans, ſed unum R Q, ex. gr., trianguli R Q S, differat a latere homologo M P trianguli M P Q quantitate infiniteſima ordinis ſuperioris; tum abſcindatur Q X, ex. gr., aequalis P M, & per A, & X ducatur A X, quae concurrat cum Q S in Z. Quoniam X Z eſt infiniteſima reſpectu A X, & angulus X A B infiniteſimus, erit X Z parallela ad R S (2). Igitur cum R X ſit infiniteſima ordinis ſuperioris, hinc differentia inter latera homologa triangulorum X Q Z, R Q S erit infiniteſima ordinis ſuperioris (3); ſed latera trianguli X Q Z non differunt a lateribus trianguli M P Q, niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis (4). Ergo latera trianguli R Q S, ac proinde latera trianguli R Q B, non differunt

(2) *per doctrinam parallelarum.*

(3) *per praecedentem part.*

(4) *per* 1. *part. hujus.*

runt

runt a lateribus trianguli M P Q, niſi quantitate infiniteſima ſecundi ordinis. *Q. E. I.*

COROLLARIUM.

Patet via, qua determinari poteſt differentia inter latera homologa triangulorum M Q P, R Q B, etiamſi latera horum triangulorum ſint infiniteſima cujuſcunque ordinis, & differentiae horum laterum ſint ſimiliter infiniteſimae cujuſcunque ordinis reſpective, & angulus S Q B ſit infiniteſimus cujuſcunque ordinis.

SCHOLION I.

Si rectae A P, A Q, A B ſint infiniteſimae, vel jaceant in directum cum chordis P Q, Q B, tunc quae hactenus demonſtravimus alterationem patiuntur.

SCHOLION II.

Fig. 15. Antequam ulterius progrediamur juvat animadvertere quantitates fluentes poſſe fluere ex omni parte, qua limite coercentur; unde ſedulo perpendendum eſt, niſi in paralogiſmos incurrere velimus, ex quibuſnam partibus data quantitas fluat: ſic abſciſſae A P, A Q, & ordinatae P M, Q N ex una parte tantum fluunt; ſed ſubtangens P V, ex. gr., non tantum fluit ex parte V, ſed etiam ex parte P, itaut tota fluxio ſit P Q + U R.

PROPOSITIO XI.

Fig. 16. IN curva quacunque, quando anguli M A B, A B N, facti a chorda A B cum tangentibus A M, B N, ſunt aequales duobus rectis, tunc chorda A B eſt maxima ex parallelis.

Demonſt. Per punctum quodlibet F ſumptum in curva ducatur P Q parallela A B. Cum anguli M A B, A B N ſint

ſint aequales duobus rectis, erit A P parallela ad B Q; ac proinde P Q aequalis erit A B; ſed puncta F, T interſectionis rectae P Q cum curva ſunt intra tangentes A M, B N. Ergo chorda F T non poteſt eſſe major recta P Q, ac proinde recta A B. Ergo A B eſt maxima chorda ex parallelis. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Si ſumatur arcus A F infiniteſimus cujuſcunque ordinis, & per punctum F ducatur F R parallela tangentibus M A, B N, ductaque chorda A F, erit angulus A F R aequalis angulo M A F, ac proinde infiniteſimus. Igitur, poſitis angulis A B N, B A M, ſeu angulis A R F, R A F finitis, erit A R infiniteſima reſpectu R F.

PROPOSITIO XII.

Fig. 17. IN curva quacunque, ſi anguli R S T, S T Q, facti a chorda S T cum tangentibus R T, S Q, ſint aequales quatuor rectis, erit chorda S T minima ex parallelis poſt maximam A F.

Demonſt. Quoniam anguli R S T, S T Q ſunt aequales quatuor rectis, tangentes R T, S Q unam rectam conficiunt cum chorda S T; ac proinde ſunt & ipſae in directum, hinc curva ulterius non procedit. Intra chordam maximam A F, & chordam S T ducatur alia chorda M N parallela ad S T; & per puncta M, & N ducantur tangentes M L, N L ſecantes alias tangentes R T, S Q in punctis R, & Q, & concurrentes in L. Chorda M N eſt major recta R Q; ſed puncta R, & Q eſſe debent extra curvam. Ergo recta R Q non poteſt eſſe minor recta S T; ac proinde chorda M N non erit minor chorda S T. Ergo chorda S T minima eſt ex parallelis poſt maximam. *Q. E. D.*

CO-

COROLLARIUM.

Si ſumatur arcus M S infiniteſimus, & per M ducatur chorda M N parallela chordae minimae S T; tum ex S demittatur normalis S G in chordam M N, erit angulus G M S aequalis angulo R S M, ac proinde infiniteſimus. Igitur, cum anguli M S G, M G S ſint finiti, erit G S infiniteſima reſpectu M G (1). (3) *per prop. 9. Lib.* 1.

LEMMA.

SI per punctum A arcus A D B deſcribatur alius arcus A S, itaut diſtantia D C ſingulorum punctorum arcus A D B a chorda A B differat reſpective quantitate infiniteſima D S a diſtantia S C ſingulorum punctorum arcus A S a chorda A B; curvatura arcus A S accipi poteſt pro curvatura arcus A D B; minime vero ſi differentia D S non ſit infiniteſima reſpectu S C. Hoc per ſe clarum eſt. Fig. 18.

SCHO-

SCHOLION.

Hoc cum reſpective tantum verum ſit, hinc in nonnullis circumſtantiis, ex. gr., quando conſiderantur quantitates ordinis rectae S D, vel ordinis ſuperioris, licitum non erit accipere curvaturam arcus A D pro curvatura arcus A S.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 19. SIt M N arcus infiniteſimus cujuſcunque ordinis curvae N M T, in qua ducta chorda M N, & tangentibus N Q, M Q, ſint anguli Q M N, M N Q infiniteſimi ejuſdem ordinis, ac eſt arcus M N, differentiae vero iſtorum angulorum ſint infiniteſimae cujuſcunque ordinis incipiendo ab ordine proximo ſuperiore praedictorum angulorum; ſi ex punctis M, & N ducantur ad tangentes M Q, N Q normales M C, N C concurrentes in C, tum centro C intervallo C N deſcribatur arcus N O; dico curvaturam arcus M N non differre a curvatura arcus N O.

De-

Demonſt. Ex puncto N ducatur ſinus rectus N R in C M. In quadrilatero Q M C N, cum anguli Q M C, Q N C ſint recti, erunt anguli M Q N, M C N aequales duobus rectis; ac proinde angulus M C N aequalis erit angulis Q M N, M N Q; adeoque angulus M C N eſt ejuſdem ordinis, ac eſt arcus M N, ſeu chorda M N (1); ſed anguli C N M, C M N ſunt finiti, & acuti, cum ſinguli differant a recto quantitate infiniteſima; hinc rectae C M, C N ſunt finitae, & earum differentia M O eſt infiniteſima (2). Praeterea ob angulos rectos C M Q, C N Q erunt quadrata C M, M Q aequalia quadratis C N, N Q; hinc cum C M ponatur major C N, erit Q N major M Q; ex recta Q N abſcindatur Q S aequalis M Q, & ducatur M S, erunt anguli S M N, M N S aequales angulo M S Q, ſeu S M Q; hinc angulus N M S eſt ſemidifferentia angulorum Q M N, M N Q; adeoque angulus S M N erit infiniteſimus reſpectu ad angulum M N S per ſuppoſitionem,

(1) *per 3. prop.*

(2) *per prop. 10. lib. 1.*

& S N

& S N erit infiniteſima reſpectu S M (1); ac proinde reſpectu S Q. Si igitur a quadratis C M, M Q ex una parte, & a quadratis C N, N Q ex altera, auferantur communiter quadrata M Q, C N, remanebit tandem rectangulum C O M aequale rectangulo Q S N, ſpretis differentiis infiniteſimis reſpectivis. Ergo C O eſt ad Q S, ut S N eſt ad ad M O; ſed Q S eſt infiniteſima reſpectu C M & N S eſt infiniteſima reſpectu S Q. Ergo M O eſt infiniteſima ordinis ſuperioris ordine duplo majore rectae Q S, ſeu M N, ſeu ſinus recti N R; ſed R O eſt infiniteſima ordinis duplo majoris ſinus recti N R (2). Ergo M O eſt infiniteſima reſpectu O R.

(1) *per prop. 14. lib. 1.*

(2) *per prop. 1. lib. 2.*

Idipſum verificatur reſpectu ad alia puncta arcuum M N, O N; nam ducto quolibet radio C D Z, & ex N ſinu recto N X, eodem modo demonſtratur D Z eſſe infiniteſimam reſpectu D X, & multo magis reſpectu D F. Si igitur ex Z ducatur normalis ad R N, erit Z E infiniteſima reſpectu E L, ut colligitur ex notis circuli proprietatibus. Ergo

cur-

curvatura arcus M N non differt a curvatura arcus N O (1). *Q. E. D.* (1) *per lemma.*

PROPOSITIO XIV.

IN curva T M N ſuperioris propoſitionis, ſi ſumantur duo arcus ſucceſſivi M T, M N infiniteſimi cujuſcunque ordinis, ſed ejuſdem; & ex punctis T, M, N erigantur normales ad curvam T G, N C interſecantes normalem ad curvam M C; dico interceptam C G eſſe infiniteſimam. Fig. 19.

Demonſt. Producatur T G uſquedum concurrat cum N C in V. Differentia inter T V, V N erit ordinis ſuperioris ordine duplo majore arcus T M N, ſeu anguli T V N; addita communiter C V, erit differentia inter T V + V C, & C N ordinis ſuperioris ordine duplo majore arcus T M N, ſeu anguli T V N; ſed C M non differt a C N, & G M a G T, niſi quantitate infiniteſima ordinis ſuperioris ordine duplo majore arcuum M N, M T. Ergo differentia in-

ter T V + V C, & C M, ſeu inter T V + V C, & T G + C G, ſeu inter G V + V C, & C G erit infiteſima ordinis ſuperioris ordine duplo majore arcus T M N, ſeu anguli T V N; ſed in triangulo G V C, ob angulos C G V, G C V infiniteſimos ejuſdem ordinis, differentia inter latera G V + V C, & baſim C G eſt infiniteſima reſpectu ad C G ordinis duplo majoris anguli G V N (1). Ergo eadem differentia reſpectu ad C M, ſeu ad quantitatem finitam eſt infiniteſima ordinis ſuperioris ordine duplo majori anguli T V N; reſpective vero ad C G eſt infiniteſima ordinis duplo majoris ordine ejuſdem anguli T V N. Ergo C G eſt infiniteſima. *Q. E. D.*

(1) *per prop.* 13. *lib.* 1.

COROLLARIUM I.

Idipſum cum demonſtretur de omnibus aliis ſucceſſivis interceptis C G eodem modo determinatis, hinc patet omnia puncta, in quibus ſeſe interſecant normales ad curvam infinite proximae,

eſſe

eſſe in alia curva, ex. gr., C G I, quae reſpectu ad curvam T M N illius *evoluta* dicitur; curva vero T M N *genita ex evoluta* C G I appellatur; nam ſi pedetentim ſolvatur filum circumplicatum circa evolutam I G C, punctum extremum I, ex. gr., deſcribet curvam T M N; normales M G, N C &c. determinatae per interſectionem normalium infinite proximarum nuncupantur *radii oſculatorii;* circulus vero ſingulis hiſce radiis deſcriptus appellatur circulus oſculi.

COROLLARIUM II.

Duae praecedentes propoſitiones verificantur etiamſi arcus M N ſit infiniteſimus ordinis ſuperioris, vel inferioris relate ad angulos Q M N, M N Q, dummodo differentia horum angulorum ſit reſpective infiniteſima; nam angulus S M N eſt ſemper infiniteſimus relate ad angulum Q M N, ſeu M N Q; adeòque S N eſt ſemper infiniteſima reſpectu S Q, ſeu reſpectu M N, ſeu reſpectu N R. Igitur cum radius C O non

poſſit eſſe ordinis ſuperioris ſinus recti R N, ſed ad ſummum ejuſdem ordinis, quando ſcilicet anguli Q M N, M N Q ſunt finiti ; hinc M O eſt ſemper infinitesima reſpectu R O; nam M O eſt quarta proportionalis poſt C O, Q S, S N; & R O eſt tertia proportionalis poſt C O + C R, & R N. Similiter differentia inter G V + V C, & C G reſpectu ad C M eſt ſemper infiniteſima ordinis ſuperioris ordine duplo majore arcus T M N, ſeu anguli T V N; ſed differentia inter G V + V C, & G C reſpectu C G eſt infiniteſima ordinis duplo majoris anguli T V N. Ergo C G eſt ſemper infiniteſima reſpectu C M.

SCHOLION.

In triangulo M C N, poſita baſi M N infiniteſima ejuſdem ordinis relate ad aſſignabilem, ac eſt angulus M C N, latera M C, C N ſunt finita; nam ut ordo anguli M C N ad angulum finitum C N M, ita ordo rectae M N ad ordinem rectae C M; ſed M N eſt ejuſ-

dem

dem ordinis relate ad finitum, ac eſt angulus M C N relate ad angulum finitum; ergo C M eſt finita. Si vero M N relate ad aſſignabilem eſt infiniteſima ordinis ſuperioris reſpectu ad ordine anguli M C N, tunc C M eſt infiniteſima. Si tandem M N eſt infiniteſima ordinis inferioris, tunc M N eſt infinita. Ergo curvatura arcus N O, ſeu N M in primo caſu aequalis eſt curvaturae circuli finiti, in ſecundo caſu eſt major, in ultimo vero eſt minor omni circulo finito.

PROPOSITIO XV.

SIt M N arcus infiniteſimus cujuſcunque ordinis curvae N M T, in qua, ducta chorda M N, & tangentibus M Q, Q N, ſint anguli Q M N, M N Q ſimul ſumpti ejuſdem ordinis, ac eſt arcus, ſed utcunque inaequales; ſi ex punctis M, & N ad tangentes M Q, Q N erigantur normales concurrentes in C, & centro C intervallo C N deſcribatur Fig. 19.

arcus

arcus N O; dico curvaturam arcus M N differre a curvatura arcus N O.

Demonſt. Ducantur rectae M S &c. ut in propoſitione decima tertia. Angulus S M N ſemidifferentia angulorum Q M N, M N Q vel eſt ejuſdem ordinis, ac eſt angulus M N Q, vel relate ad nunc eſt infinitus; ergo S N eſt ſemper ejuſdem ordinis rectae M N (1), ſeu ſinus recti N R. Cum igitur in hoc caſu ſit biſrectangulum C O in O M aequale biſrectangulo Q S in S N + quadrato S N; ergo M O eſt quarta proportionalis poſt bis ſinum totum C O, poſt bis Q S + S N, & poſt S N. Sed bis Q S + S N, & S N ſunt ejuſdem ordinis; hinc M O relate ad C O eſt ordinis duplo majoris rectae Q N, ſeu ſinus recti N R; ſed etiam R O relate ad C O eſt infiniteſima ordinis dupli majoris ſinus recti N R; ergo M O, & O R ſunt ejuſdem ordinis. Idipſum cum demonſtretur de aliis rectis infinitis Z E, & E L; ergo curvatura arcus M N differt a curvatura arcus N O (2). *Q. E. P.*

(1) *per prop.* 13. *&* 14. *lib.* 1.

(2) *per lemma.*

PRO-

PROPOSITIO XVI.

IN curva antecedentis propoſitionis, ſi ſumantur duo arcus T M, M N infiniteſimi cujuſcunque ordinis, & ex punctis T, M, N ducantur normales ad curvam T V, M C, N C ſeſe interſecantes in punctis G, V, C; dico interceptam C G, & rectam G M eſſe ejuſdem ordinis. Fig. 19.

Demonſt. Differentia inter T V, V N reſpectu C M eſt infiniteſima ordinis duplo majoris anguli T V N (1); ergo argumentando, ut in propoſitione decima quarta, erit differentia inter G V + V C, & G C reſpectu C M ordinis duplo majoris anguli T V N; ſed differentia inter G V + V C, & G C reſpectu ipſius C G eſt infiniteſima ordinis duplo majoris anguli T V N; ergo eadem differentia eſt infiniteſima ejuſdem ordinis tum reſpectu C M, tum reſpectu G C; adeoque M C, G C ſunt ejuſdem ordinis. *Q. E. D.*

(1) *per praecedentem.*

COROLLARIUM.

Hinc patet curvas hujuſmodi non habere radium oſculatorium, neque circulum oſculi, neque evolutam.

SCHOLION.

Methodi hactenus traditae pro determinandis evolutis curvarum, locum dumtaxat habere poſſunt in curvis propoſitionis decimae tertiae, in quibus anguli, facti a chorda infiniteſima, & tangentibus ductis per eſtremitates iſtius chordae, non differunt, niſi infiniteſima quantitate reſpective. Sed advertendum eſt plures curvas, ſumptis arcubus infiniteſimis ordinis ſuperioris, habere praerequiſitam conditionem, licet tali conditione non gaudeant, ſumptis arcubus infiniteſimis ordinis inferioris, ut colligitur ex corollario primae propoſitionis; adeoque pro determinandis evolutis harum curvarum confugiendum eſt ad arcus infiniteſimos ordinis ſuperioris.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

SIt S C radius infinitus cujuſcunque ordinis circuli A C B, in quo ſumatur arcus A B infiniteſimus cujuſcunque ordinis, incipiendo a primo relate ad finitum; dico nullam dari parabolam primam C X ex infinitis ordinibus, habentem parametrum C Z finitam, cujus vertex habeat eandem curvaturam arcus A C B. Fig. 20.

Demonſt. Ex arcu C A ducatur quaelibet ordinata A M in communem axem C R, quae ſecet parabolam in X. Si curvatura arcus C X non differt a curvatura arcus A C, eſt A X infiniteſima reſpectu X M; adeoque rectangulum R M in M C multiplicatum in potentiam determinatam ordinatae A M non differt a rectangulo R M in M C multiplicato in potentiam eandem rectae X M (1); ſed potentia praedicta rectae X M multiplicata in rectangulum R M in M C, ſeu in quadratum M A, ſeu in quadratum M X aequatur determinatae poten-

(1) per prop. 20. lib. 1.

riae parametri Z C multiplicatae in C M. Ergo rectangulum R M in M C multiplicatum in potentiam A M aequatur determinatae potentiae parametri C Z multiplicatae in C M. Ergo R M multiplicata in potentiam rectae A M aequatur determinatae potentiae parametri C Z. Idipſum demonſtratur de quavis alia recta R m multiplicata in eandem potentiam rectae a m; ergo R M multiplicata in potentiam rectae A M non differt, niſi infiniteſima quantitate, a recta R m multiplicata in eandem potentiam rectae a m; ſed R M, R m non differunt, niſi infiniteſima quantitate M m. Ergo potentiae eaedem rectarum A M, a m non poſſunt differre, niſi infiniteſima quantitate reſpective. Quod cum falſum ſit, falſum etiam erit curvaturam arcus C X non differre a curvatura arcus C A. *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

SI in puncto quolibet A occurrant duae curvae A B M, A C N, in quibus, ſumptis circa idem punctum A arcubus infiniteſimis A B, A C, ductiſque chordis A B, A C, angulus B A C non ſit infiniteſimus, vel non differat a duobus rectis quantitate infiniteſima; dico huic puncto duas competere tangentes; ſi vero angulus B A C ſit infiniteſimus, vel differat a duobus rectis quantitate infiniteſima; dico huic puncto unam dumtaxat competere tangentem. Fig. 21. 22. 23. 24.

Demonſt. prima pars. In puncto A ducantur tangentes S A T, s A t ad arcus A B M, A C N. Quoniam arcus B A, A C ſunt infiniteſimi, & punctum A eſt ab utroque excluſum, hinc anguli B A S, C A s ſunt infiniteſimi (1), qui ſi addantur angulo B A C in figura 21., vel deducantur ab angulo B A C in figura 22., vel eidem angulo B A C addatur unus B A S, deducatur alius C A s, in figura 23., &

(2) per prop. 2.

24., reſultabit anguſus S A s interſectionis tangentium S A T, s A t, qui neque erit infiniteſimus, neque differet a duobus rectis quantitate infiniteſima. Ergo tangentes S A T, s A t ſe interſecant ad angulos finitos; adeoque veluti unica tangens conſiderari non poſſunt. *Q. E. P.*

Demonſt. ſecunda pars. Si angulus B A C vel eſt infiniteſimus, ut in figura 22., & 23., vel differt a duobus rectis quantitate infiniteſima, ut in figura 21., & 24., tunc etiam angulus S A s in figura 22., & 23. erit infiniteſimus; in figura vero 21., & 24. differt a duobus rectis quantitate infiniteſima; & per conſequens in hiſce figuris angulus S A t eſt infiniteſimus. Ergo tangentes S A T, s A t, ut unica tangens ſpectari poſſunt. *Q. E. S.*

COROLLARIUM.

Quod dictum eſt de duabus curvis circa punctum A exiſtentibus, idem dici poteſt de infinitis.

SCHO-

SCHOLION I.

Secunda pars propoſitionis falſa eſſe poteſt, ſi curvatura circa punctum A ſit minor omni circulo finito; etenim fieri poteſt in hoc caſu, ut angulus S A t in figura 21., & 24., vel S A s in figura 22. & 23. ſit infiniteſimus ordinis inferioris relate ad ordinem anguli B A S, facti a tangente A S cum chorda infiniteſima B A; & tunc tangentes S A T, s A t, ut unica tangens conſiderari non poſſunt; quod certe animadverſione dignum eſt.

SCHOLION II.

Quando circa punctum A ſunt plures tangentes, tunc punctum illud appellatur *punctum interſectionis*; quando unica eſt tantum tangens, tunc punctum illud in figura 21. non habet nomen peculiare; in figura 22., & 23. dicitur punctum *regreſſus*; in figura 24. dicitur punctum *flexus contrarii*. Igitur in puncto flexus contrarii, quae eſt tangens ad u-

num arcum A B M, eſt etiam tangens ad alium A C M.

SCHOLION III.

Fig. 25., 26., 27., 28. Si in aliquo puncto D alicujus curvae, pars X M ordinatae S M, intercepta inter curvam, & tangentem, evadat nihilo aequalis, aut infinita, hoc eſt, ſi intercepta X M evadat ordinis ſuperioris, vel inferioris relate ad ordinem ejuſdem interceptae in aliis punctis curvae, tunc communiter exiſtimatum eſt punctum illud aut eſſe punctum flexus contrarii, aut regreſſus; verum hoc generaliter loquendo falſum eſſe patet ex eo, quod in punctis etiam, in quibus tangens D M ſimpliciter parallela eſt, vel normalis diametro B A, intercepta X M evadit nulla, vel infinita, ſenſu jam explicato, abſque eo quod punctum D ſit punctum flexus contrarii, aut regreſſus. Igitur ex eo, quod pars ordinatae intercepta inter curvam, & tangentem ſit nihilo aequalis, aut infinita, nil aliud inferri poteſt, quam punctum

ctum D eſſe punctum peculiare curvae, in quo vel adeſt maximum aliquod, vel minimum, vel punctum flexus contrarii, vel regreſſus. Ut autem determinemus utrum in puncto D ſit maximum aliquod, aut minimum, vel flexus contrarius, vel regreſſus, puto nullam aliam tutiorem viam nos ingredi poſſe, quam recurrendo ad puncta S, R infinite proxima puncto B, & hinc inde ab eodem puncto B accepta in linea abſciſſarum, & obſervando utrum hiſce punctis conveniant ordinatae, ſi ſint poſitivae, an negativae; utrum etiam interceptae inter curvam, & tangentem ſint poſitivae, an negativae, licet ſint cujuſcunque ordinis infiniteſimorum; nam ex horum combinatione facile eruitur quam mutationem ſubeat curva in puncto D. Sit itaque, ex. gr., punctum D curvae A D C tale, ut intercepta inter curvam, & tangentem N D M ſit nihilo aequalis, ſeu infiniteſima ordinis ſuperioris relate ad ordinem aliarum interceptarum in caeteris punctis ejuſdem curvae; ſumantur duo puncta S, R hinc inde a pun-

cto B in linea abſciſſarum, & huic puncto infinite proxima; ſupponamus puncto S competere unicam ordinatam S X, & puncto R unicam ordinatam Z R ambas poſitivas, aut negativas, tum interceptas X M, Z N inter curvam, & tangentem eſſe ambas negativas; ut in figura 25., & in hoc caſu arcus A D, D C ambo vertunt concavitatem ad diametrum B A, unus ex una parte, alius ex alia ordinatae B D. Ergo in puncto D neque eſt flexus contrarius, neque regreſſus; ſed tantum ordinata B D erit maxima ex ordinatis iſtorum arcuum. Si intercepta X M eſſet negativa, & N Z poſitiva, ut in figura 26., tunc arcus A D vertit concavitatem, & D C convexitatem ad diametrum A B, unus ex una parte, alius ex alia ordinatae B D. Ergo punctum D erit punctum flexus contrarii. Si in puncto R ordinatae ſint imaginariae, ſed puncto S competant duae ordinatae S X, S Z ambae poſitivae, aut negativae, & interceptae X M, Z M ſint ambae negativae ut in figura 27., tunc arcus A D,

B C

BC ambo vertunt concavitatem ad diametrum A B, ſed ambo ex eadem parte ordinatae B D. Ergo punctum D eſt punctum regreſſus primae ſpeciei. Si vero intercepta X M ſit negativa, & M Z e contra ſit poſitiva, tunc arcus A D concavitatem arcus D C convexitatem vertit ad diametrum A B ex eadem parte ordinatae B D. Ergo punctum D eſt punctum regreſſus alterius ſpeciei. Et ſic eadem methodo procedendo in aliis combinationibus, non erit difficile determinare alterationem curvae in puncto D. Atque haec eſt methodus, qua uſus eſt etiam celeberrimus Pater Vincentius Riccati Societatis Jeſu in Diſſertatione, quae inſcribitur: *Animadverſiones in fractionem, cujus numerator & denominator per certam determinationem nihilo aequales fiunt*: quae inſerta eſt Tom. 2. Comm. Academiae Bononienſis. Et haec mihi videntur ſufficere pro Elementis Geometriae Infiniteſimorum.

APPRO-

APPROBATIO.

Juſſu Reverendiſs. P. D. Cherubini Branconii Abbatis Generalis Congregationis Caeleſtinorum diligenter expendimus librum, cui titulus eſt = Elementa Geometriae infiniteſimorum = *a P. D. Hieronymo Saladini ejuſdem Congregationis Monacho compoſitum, & quum in ea Tractatione nihil Religioni & moribus adverſum nobis occurrerit; imo vero quum dirigendis, & juvandis ſtudiis ſublimioris Matheſeos mirifice opportuna viſa ſit, hinc typis evulgari poſſe, ſententia noſtra eſt.*

D. Fridericus de Judice Abbas S. Euſebii Romae.

D. Appianus Bonafedius Abbas S. Joannis Báptiſtae Bononiae.

D. CHE-

D. CHERUBINUS BRANCONIUS
Abbas Generalis Congregationis
Caeleſtinorum.

QUum duo Congregationis noſtrae Theologi expenderint opus, cujus titulus eſt = Elementa Geometriae infiniteſimorum = *atque edi poſſe retulerint, facultatem facimus D. Hieronymo Saladini Operis auctori illud typis evulgandi, ſi iis, ad quos ſpectat, ita videbitur.*

Datum ex noſtro Monaſterio S. Jo. Baptiſtae Bononiae die 1. *Maji Anno* 1760.

D. Cherubinus Branconius
Abbas Generalis.

D. Michael Sangiorgius a Secretis.

Vidit

Vidit D. Joannes Maria Vidari Clericus Regularis S. Pauli, & in Eccleſia Metropolitana Bononiae Poenitentiarius pro Eminentiſſimo, & Reverendiſſimo Domino D. VINCENTIO Cardinali MALVETIO Archiepiſcopo Bononiae, & S. R. I. Principe.

Die 5. Julii 1760.

Imprimatur.

F. P. P. *Salvatori Vicarius Generalis Sancti Officii Bononiae.*

Pag.	lin.	ERRATA.	CORRIGE.
62	10	infinitum	finitum
65	7	S R reſpectu S M	S M reſpectu S R
68	10	Q N, N R	N R, Q N
	11	Q O, O R	O R, Q O
69	2	Q O, O R	O R, Q O

Propoſitioni XVII. Lib. Pr. Pag. 34 *lin.* 6 *adde;* modo angulus A C B non ſit rectus, neque differat a recto quantitate infiniteſima.

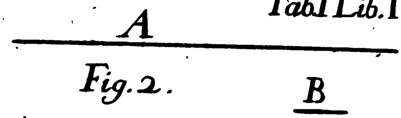


Fig. 2.

X

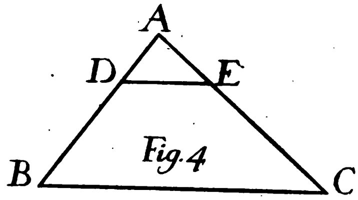


Fig. 4

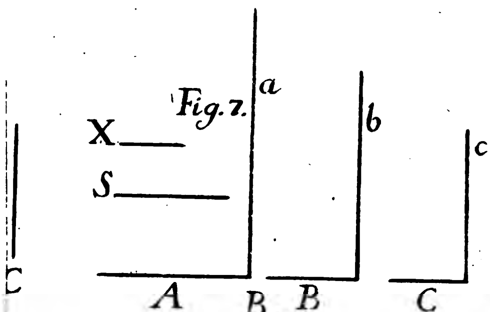


Fig. 7.

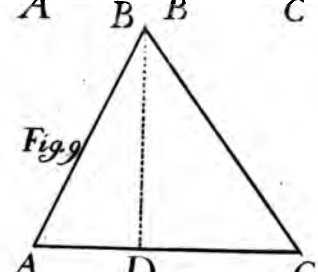


Fig. 9

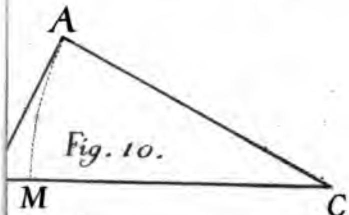
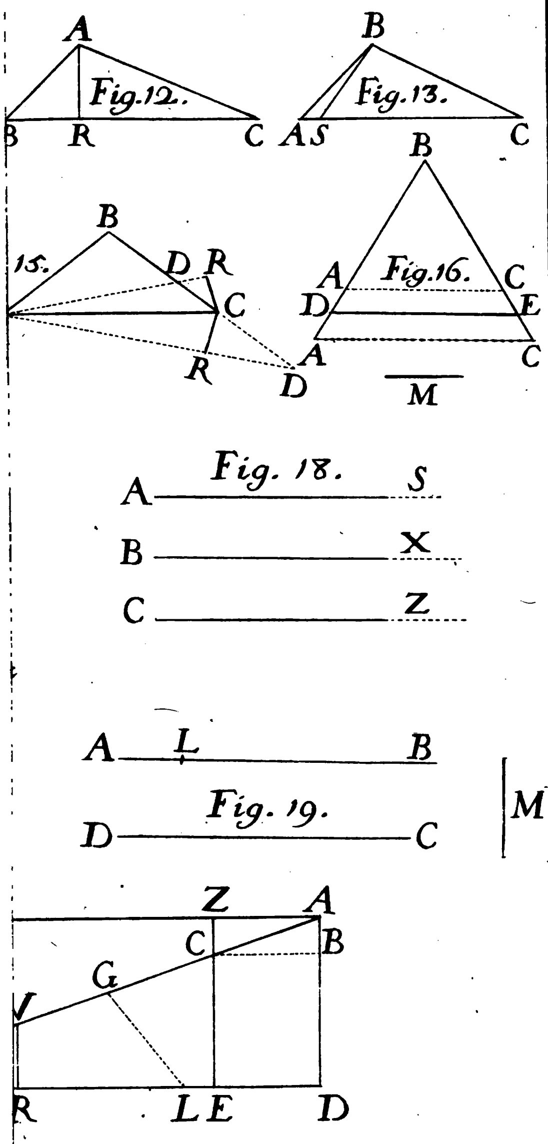


Fig. 10.

UNIV. OF MICH.

Tab.II.Lib.I.



UNIV



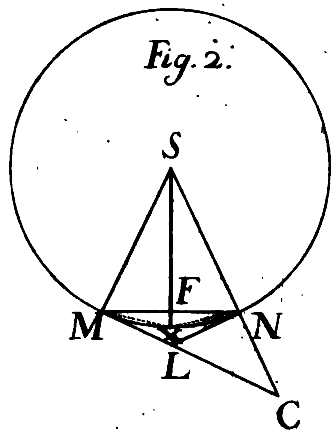


Fig. 2.

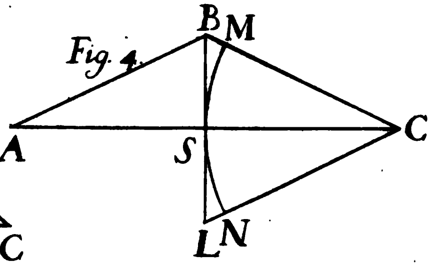


Fig. 4.

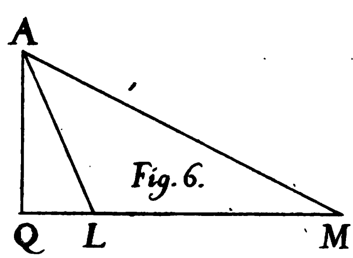


Fig. 6.

UNIV. OF MICH.

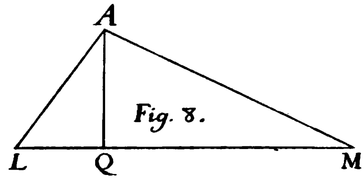


Fig. 8.

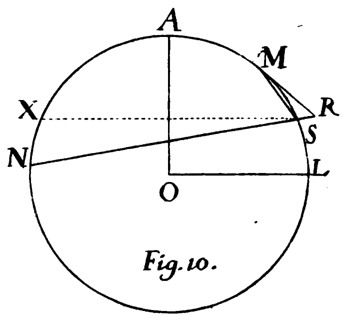


Fig. 10.

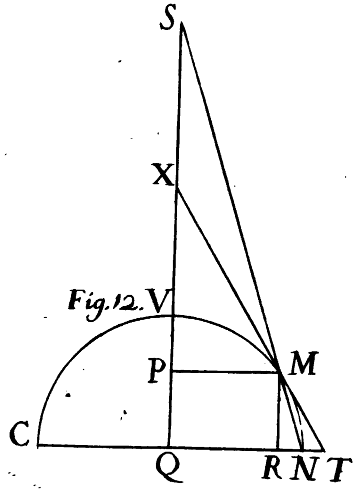


Fig. 12.

Tab.III. Lib.II.

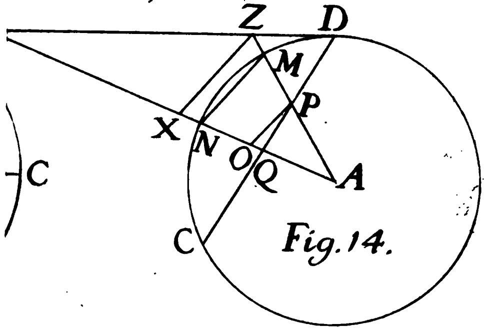


Fig. 14.

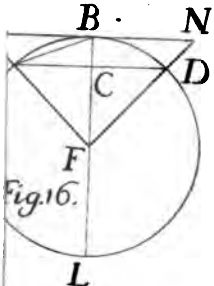


Fig. 16.

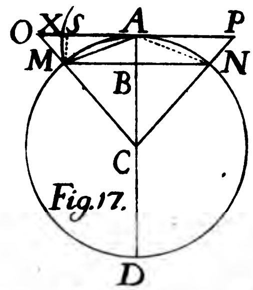


Fig. 17.

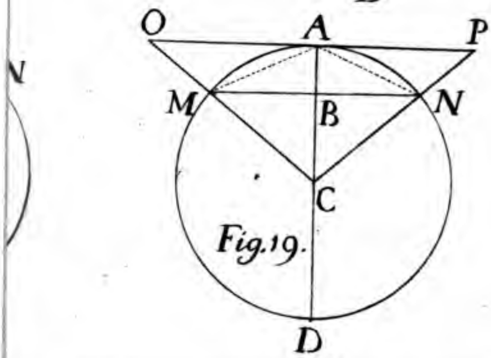


Fig. 19.

UNIV OF MICH.

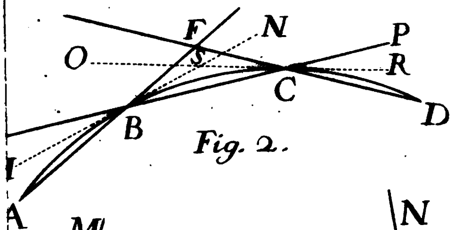


Fig. 2.

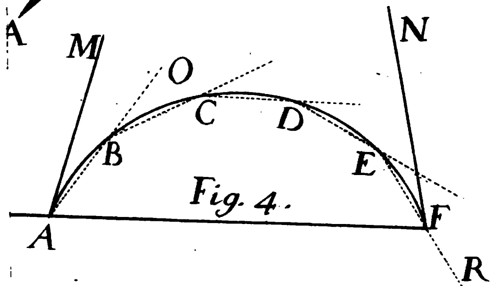
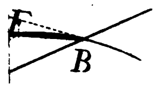


Fig. 4.



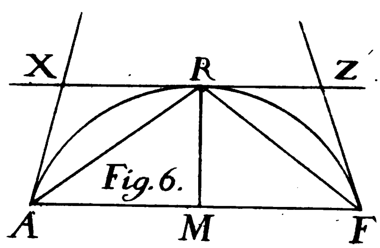
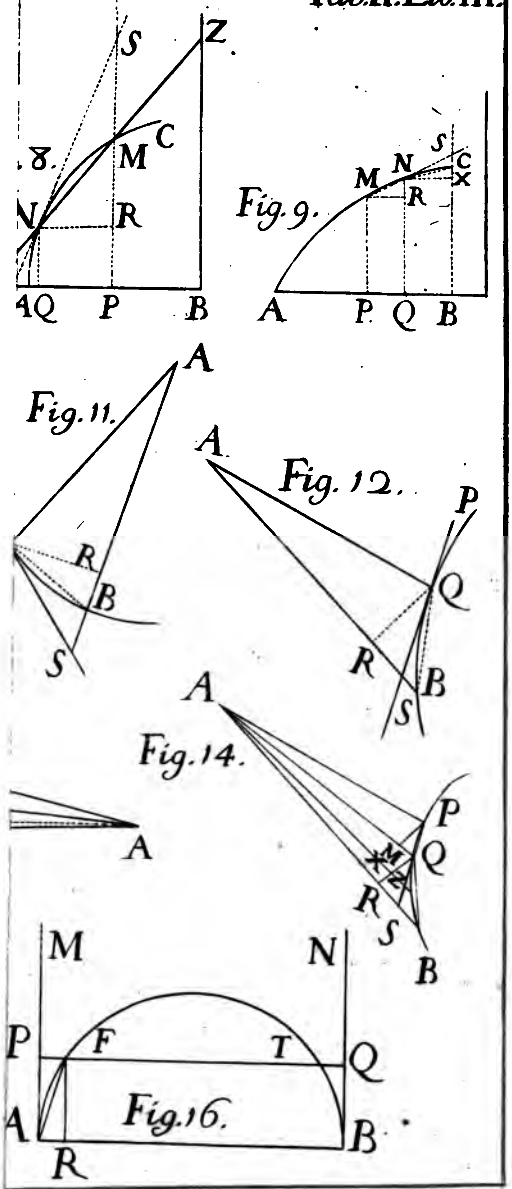


Fig. 6.

Tab. II. Lib. III.



UNIV. OF MICH.

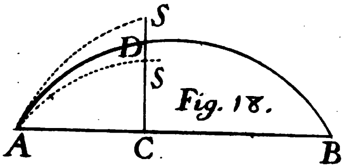
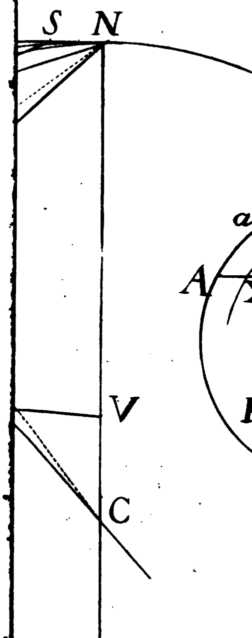


Fig. 18.



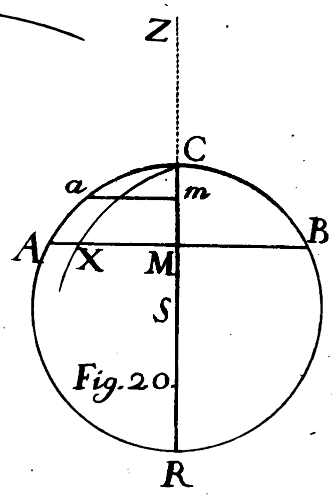
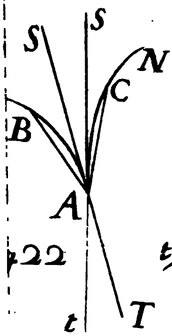


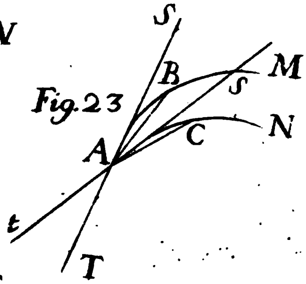
Fig. 20.

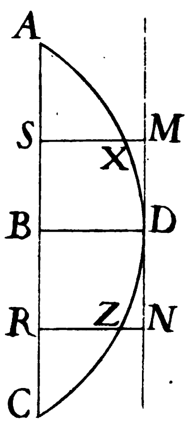
UNIV. OF MICH.



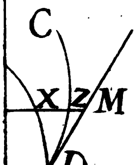
⁊22

Fig.23





ig.25



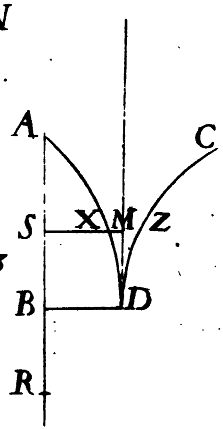


Fig.28

UNIV. OF MICH.

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06359 2979